ELEMENTS OF ALGEBRA

BY

JAMES HADDON, W. S.

TRANSLATED INTO MARÁTHÍ

AND

PRESENTED TO THE DAXINÁ PRIZE COMMITTEE

BY

DÁJÍ NÍLCANTH NAGGARKAR

REVISED AND CORRECTED

BY

KRISHNA SHÁSTRÍ GODBOLE,

BY ORDER OF THE

Director of Public Instruction.

SECOND EDITION

BOMBAY:

PRINTED AT GANPAT CRUSHNAJI'S PRESS.

1862.

Price 12 Annas.

NOTE.

In some places the original English copy itself contained errors. of a slight character. There were also some articles too much abridged, and therefore comparatively difficult to students. I have endeavoured to remedy these by enlarging the abridged articles through the help of other books, such as those of Hall Davies, Colenso, &c. and to clear some apparent ambiguities by adding foot notes. The following articles particularly have been much enlarged.

Art. 24th On Harmonical Progression.

Art. 29th on the Exponential Throrem.

Art. 33, 34, 35, 36, 37, 39 on Variations, Permutations and Combinations.

THE REVISER.

Poona,
1st. March 1854

बीजगणिताचीं मूलतत्वें.

ह्या विषयाचा मूलग्रंथ इंग्रेजी भाषेंत हाडन् साहेबानें केला,

त्याचें हें मराठी भाषांतर

दाजी नीळकंठ नगरकर

ह्यांनीं करून दक्षिणाप्रैज कमेटीस नजर केलें,

तें

कृष्णशास्त्री गोडबोले

ह्यांनीं तपासून शुद्ध केलें.

आवृत्ति २ री.

मेहेरबान् डैरेक्टर आफ् पब्लिक् इन्स्त्रक्शन् ह्यांचे हुकुमावरून

मुंबईंत.

गणपत कृष्णाजी यांचे छापखान्यांत छापिली.

सन १८६२

किम्मत

सूचना.

मूळपुस्तकांत कितीएक ठिकाणीं हस्तदोषांसारख्या कांहीं चुक्या होत्या त्या नीट केल्या; कितीएक ठिकाणीं कितीएक विषयांचीं कलमें फार संक्षेपानें लिहिल्यामुळें शिकणाऱ्यांस समजण्यास कठीण झालीं होतीं तीं इतर पुस्तकांच्या साहाय्यानें वाढवून समजण्याजोगीं केलीं; कितीएक प्रश्नांचीं उत्तरें असंभविक दिसतात तीं खरीं आहेत असें समजण्याकरितां कितीएकजागीं टिपा लिहिल्या;अशा रीतीनें विद्यार्थ्यांस चांगलें सुलभ वाटायाजोगें जितकें करवलें तितकें केलें आहे.

प्रस्तावना.

ज्यास बीजगणिताचें बरेंच ज्ञान झालें आहे, त्याच्या अनुभवास ही गोष्ट आली असेल, कीं जोंपर्यंत त्यास समीकरणाच्या स्वरूपाचें ज्ञान झालें नव्हतें, तोंपर्यंत त्यास बीजगणिताचा अभ्यास करण्यांत कांहीं गोडी लागत नव्हती, आणि ह्मणूनच बीजगणिताचे अभ्यासापासून त्याचे चित्तास समाधान वाटत नव्हतें; कांकीं तो शिकत असतां त्यास असे कितीएक विषय आले, कीं जे सहज समजण्याजोगे नव्हते, आणि त्यानें श्रम करून कांहीं नियम समजून घेतले असतांही त्यांचा उपयोग त्यास त्यावेळीं समजत नव्हता. अशा स्थितींत, ही विद्याच निरुपयोगी आहे, असेंही केव्हां केव्हां त्याचे मनांत आल्यावांचून राहिलें नाहीं.

ह्यापुस्तकांत विषयांची रचना अशी केली आहे, कीं विद्यार्थ्यांस बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, आणि भागाकार करतां येण्यापुरते मूळभूत नियम माहीत झाले न झाले तोंच त्यानें समीकरणाचे स्वरूपाचा विचार करूं लागावा. आणि त्यास जें काय थोडकेंसें ज्ञान प्राप्त झालें असेल त्याचे योगानें त्यानें कांहीं प्रश्न सोडवावे. असेंच, त्यास बीजांतील अपूर्णपद नियमांची माहिती झाली ह्मणजे त्याच्या वाढलेल्या ज्ञानाचे योगानें त्यास सोडवतां येतील, अशीं कांहीं समीकरणें आणि प्रश्न अपूर्ण बीजपद ह्याविषयांपुढें दिले आहेत.

प्रस्तावना.

अलीकडे जे मोठमोठे गणिती झाले त्यांपैकीं एकानें असें लिहिलें आहे, कीं गणित वगैरे विद्या शिकवितेवेळेस उदाहरणांच्या योगानें विद्यार्थ्यांचे मनांत त्याविद्यांचीं मूलतत्वें आणून देण्याची रीति नुसते नियम सांगण्याच्या रीतीपेक्षां चांगली आहे; आणि जो शिकविण्याचे कामांत वहिवाटलेला आहे तो ह्या मतास अनुसरेल. अभ्यास करते वेळेस विद्यार्थ्यांस कांहीं साहाय्य मिळावें, ह्या हेतूनें ह्या पुस्तकांतील बहुतएक विषयांत कांहीं उदाहरणें व प्रश्न सोडवून त्यांत नियमांचें बरेंच स्पष्टीकरण केलें आहे.

अनुक्रमणिका.

अनुक्रमणिका.

बीजगणित.

प्रकरण १.

(१) ज्या विद्येंत विवक्षित संख्येचें किंवा संख्यांचें सामान्यतः अक्षरांनीं व कार्यप्रकाशक चिन्हांनीं प्रदर्शन केलें असतें, त्या विद्येस **बीजगणित** असें म्हणतात. त्यांत जीं अक्षरें येतात तीं दोन जातींचीं पदें दाखवितात. **अ, ब, क,** इत्यादि अक्षरें व्यक्त पदें दाखवितात, आणि क्ष, य, ज्ञ, इत्यादि अक्षरें अव्यक्त पदें दाखवितात.

ह्या गणितांत ज्या कार्यप्रकाशक चिन्हांची योजना करितात तीं चिन्हें लिहितों.

= ह्या चिन्हास **बरोबरीचें** चिन्ह असें म्हणतात.

+ ह्यास **धन** चिन्ह म्हणतात. हें चिन्ह **बेरीज** दाखवितें. उदाहरण, जसें ३ + ५ = ३ आणि ५ ह्यांची बेरीज = ८; तसें, **अ** + **ब** = **अ** आणि **ब** ह्यांची बेरीज.

– ह्यास **ऋण** चिन्ह म्हणतात. हें चिन्ह **वजाबाकी** दाखवितें. उदाहरण, जसें ५ – २ = पांच आणि दोन ह्यांची वजाबाकी = ३ ; तसें, **ब** – **क** = **ब** आणि **क** ह्यांची वजाबाकी.

जेव्हां **क्ष** आणि **य** ह्या दोन पदांतून मोठें कोणतें व लहान कोणतें हें कळत नाहीं, तेव्हां ह्यांचें अंतर ∾ ह्या चिन्हानें दाखवितात. म्हणजे **क्ष** ∾ **य**.

× किंवा. ह्यास **गुणन** चिन्ह म्हणतात. हें **गुणाकार** दाखवितें. उदाहरण, २ **क** × ३ **ड** = दुप्पट **क** आणि तिप्पट **ड** ह्यांचा गुणाकार. येथें दोहोंस **क** चा **वेळाप्रकाशक** किंवा **गुणक** म्हणतात, आणि तिहींस **ड** चा **वेळाप्रकाशक** किंवा **गुणक** म्हणतात. **अ क्ष** आ-

णि ब क्ष ह्यांचा अर्थ अ × क्ष आणि ब × क्ष असा आहे. येथें अ आणि ब यांस क्ष चें अक्षर वेळाप्रकाशक म्हणतात. कधीं कधीं गुणाकार पुढें सांगितल्या रीतीप्रमाणें लिहितात. (अ + ब) . (क − ड) किंवा (अ + ब) (क − ड) किंवा $\overline{अ + ब} . \overline{क - ड}$ ह्याचा अर्थ असा आहे कीं, अ आणि ब ह्यांच्या बेरजेस क आणि ड ह्यांच्या वजाबाकीनें गुणावें. अ ब + क, ह्याचा अर्थ असा आहे कीं, अ आणि ब ह्यांचा गुणाकार करून त्यांत क मिळवावा. जर अ = २, ब = ३ , आणि क = १ , अशा संख्या धरल्या तर अ ब + क = २ × ३ + १ = ७. अ (ब + क), ह्याचा अर्थ असा आहे कीं, ब आणि क ह्यांचे बेरजेस अ नें गुणावें; वरचेप्रमाणेंच जर अ = २, ब = ३ , आणि, क = १ , अशा संख्या धरिल्या तर, अ (ब + क) = २ (३ + १) = २ × ४ = ८ होतात.

÷ ह्या चिन्हास भाजन चिन्ह म्हणतात. हें चिन्ह भागाकार दाखवितें. उदाहरण, म ÷ न किंवा प्रसिद्ध रीतीच्या अन्वयें $\frac{म}{न}$ ह्याचा अर्थ न नें म ला भागावें असा आहे. जर म = ६ आणि न = २ असें धरलें तर, $\frac{म}{न} = \frac{६}{२} = ३$ होतात.

: :: : ह्या चिन्हास प्रमाण चिन्ह म्हणतात. उदाहरण, अ : ब : : क : ड. ह्याचा अर्थ असा आहे कीं, अ आणि ब ह्यांच्या मध्यें जें प्रमाण आहे, तेंच प्रमाण क आणि ड ह्यांच्या मध्यें आहे.

$\surd$ किंवा $\sqrt{}$ ह्यांस मूलचिन्हें म्हणतात. उदाहरण, $\sqrt{क्ष}$ म्हणजे क्ष चें वर्गमूळ होय.

$\sqrt[3]{क्ष + य}$ म्हणजे क्ष आणि य ह्यांचे बेरजेचें घनमूळ होय.

२,३,४, इत्यादि चिन्हें पदांच्या डोक्यावर मांडलीं असतां तीं त्या पदांचे ते ते घात दाखवितात. उदाहरण, $\text{क्ष}^{२}$ म्हणजे क्ष चा वर्ग (म्हणजे दुसरा घात) होय. $(\text{क्ष} + \text{ज्ञ})^{४}$ किंवा, $\overline{\text{क्ष} + \text{ज्ञ}}^{४}$, म्हणजे क्ष आणि ज्ञ ह्यांचे बेरजेचा चतुर्घात. जर, क्ष = ६ आणि ज्ञ = ४ धरले, तर $(\text{क्ष} + \text{ज्ञ})^{४} = (६ + ४)^{४} = (१०)^{४} = १००००$ होतील.

सांगितलेल्या चिन्हांखेरीज आणखी दुसरीं चिन्हें आहेत तीं नुसतींच लिहून दाखवितों. कारण, तीं विवरण केल्यावांचून समजण्याजोगीं आहेत.

∵ ह्याचा अर्थ कारणकीं, ∴ ह्याचा अर्थ म्हणून. ∝ ह्याचा अर्थ प्रमाणानें विकार पावणें. ⁊ ह्याचा अर्थ पेक्षां मोठें. ∠ ह्याचा अर्थ पेक्षां लहान. ∞ ह्याचा अर्थ अनंतत्व. आणि ± ह्याचा अर्थ अधिक किंवा उणें.

उदाहरण १, अ = ३, ब = २, आणि क = ४ असें धरून पुढील पदांची संख्या काढ.

१, अ + ३ ब + क; ह्याची संख्या काय होती ?

उत्तर, १३

२, ४ अ + २ ब - अक; ह्यांची संख्या काय होती ?

उत्तर, ४

३, $\text{अ}^{२}$ + ब (क - अ); ह्यांची संख्या काय होती ?

उत्तर, ११

४, ५ (अ + $\text{ब}^{३}$ - २ क); ह्यांची संख्या काय होती ?

उत्तर, १५

उदाहरण २, जेव्हां क्ष = ४, य = ३, ज्ञ = १, आणि न = २, आहेत, तेव्हां पुढील पदांची संख्या काढ.

१, न (क्ष + य - ज्ञ); ह्यांची संख्या काय होती ?

उत्तर, १२

२, $\frac{\text{क्ष}^{2} + \text{य}^{3} - \text{९ज्ञ}}{\text{८न} + \text{१}}$ ह्यांची संख्या काय होती ?

उत्तर, २

३, $\frac{\text{क्ष}^{3}}{\text{८}} - \frac{\text{य}^{2}}{\text{३}}$ + नज्ञ; ह्यांची संख्या काय होती ?

उत्तर, ७

४, (क्ष^{2} - य^{2}) - (क्ष - य)^{2} + न (क्ष - य - ज्ञ); ह्यांची संख्या काय होती ?

उत्तर, ६

(२) ज्या पदांतलीं अक्षरें एकसारखींच असतात, त्यांस **सरूपपदें** म्हणतात. जसें, २ **अ**, ५ **अ**; ३ **क्ष**^{3}, ४ **क्ष**^{3}; आणि **अक्षय**, २ **अक्षय**, १० **अक्षय**; इत्यादि.

ज्या पदांचीं अक्षरें भिन्न भिन्न असतात, त्यांस **विरूपपदें** म्हणतात. जसें, २ **अ**, २ **ब**, ५ **अय**;

ज्या पदांच्या पूर्वी + हें चिन्ह असतें, किंवा कोणतेंही चिन्ह नसतें त्या पदांस **धनपदें** म्हणतात.

ज्या पदांच्या पूर्वी - हें चिन्ह असतें, त्या पदांस **ऋणपदें** म्हणतात.

एका पुरुषाजवळ २ रुपये आहेत असें मानलें तर, त्याजवळ वास्तविक २ रुपये आहेत म्हणून ते + २ रुपये आहेत, असें म्हणावें. आतां त्यांतील १ रुपया त्यानें खर्चिल्यास त्याजवळ वास्तविक एक रुपया राहिला तो + १ रुपया असें म्हणावें. पुढें त्यानें तोही रुपया खर्चिल्यास त्याजवळवास्तविक कांहीं राहिलें नाहीं; म्हणून त्याजपाशीं ० आहे असें म्हणावें.

आतां आपण असें समजूं कीं, त्यानें एक रुपया कर्ज घेतला तर त्याला एक रुपया कर्ज झाला, म्हणून - १ रुपया आहे असें म्हणावें. पुढें त्यानें आणखी एक रुपया कर्ज घेतला अशी कल्पना केल्यास त्यास एकंदर दोन रुपये कर्ज झा-

ले म्हणून त्याजवळ - २ रुपये आहेत असें म्हणावें.

(३) बीजगणितांतील प्रत्येक पदास अंकरूप वेळाप्रकाशक असतो. तो कधीं कधीं लिहितात, व कधीं कधीं लिहित नाहींत. जेथें वेळाप्रकाशक लिहिलेला नसतो तेथें १ हा वेळाप्रकाशक आहे असें समजावें. म्हणून जसें, ३ घोडे, ५ घोडे, आणि १ घोडा, मिळून ९ घोडे होतात; तसें, ३ अ, ५ अ, आणि अ, मिळून ३ अ + ५ अ + १ अ = ९ अ होतात, आणि जसें, धान्याच्या १० गोण्या आहेत त्यांतून एक गोणी काढिली म्हणजे ९ गोण्या राहतात, तसें १० क्ष - क्ष = १० क्ष - १ क्ष = ९ क्ष होतात.

बेरीज.

उदाहरणें.

पहिलें, २ अ + ब, ३ अ + २ ब, अ + ५ ब, आणि ३ ब + ४ अ; ह्यांची बेरीज कर.

२अ + ब.	येथें २ अ + ३अ + १अ + ४अ = १०अ
३अ + २ब.	आणि १ ब + २ ब + ५ ब + ३ ब = ११ ब
अ + ५ब.	∴ एकंदर बेरीज १० अ + ११ ब आहे.
४अ + ३ब.	
१०अ+११ब हें उत्तर.	

दुसरें, ३ क्ष − २ य, ६ क्ष + ४ य, − क्ष − ३ य, आणि − य − ५ क्ष; ह्यांची बेरीज कर.

३ क्ष − २य	येथें ३ क्ष+ ६ क्ष−१क्ष−५क्ष=९क्ष−६क्ष= ३क्ष
६ क्ष + ४य	आणि४य−२ य−३य−१य=४य−६य=−२य
− क्ष − ३य	∵ −६य =−४ य−२ य; ∴ ४य−६ य =४य
− ५ क्ष −य	−४य−२य=०−२य=−२य
३क्ष−२य हें उत्तर.	∴ एकंदर बेरीज ३ क्ष − २ य.

तिसरें, क्ष^{२} − ३ क्ष य + २ य^{२}, य^{२} − ४ क्ष^{२} + क्षय, आणि क्षय − ५ य^{२} + ३ क्ष^{२}, ह्यांची बेरीज कर.

क्ष^{२}−३क्षय+२य^{२}	येथें क्ष^{२}+३क्ष^{२}−४क्ष^{२}= ४क्ष^{२}− ४क्ष^{२}=० आणि
−४क्ष^{२}+क्षय+य^{२}	१क्षय+१क्षय−३ क्षय=२ क्षय−३ क्षय=
३क्ष^{२}+क्षय−५य^{२}	−१ क्षय···२य^{२}+य^{२}−५य^{२}=३य^{२}−५य^{२}=−२य^{२}
उत्तर,−क्षय−२य^{२}	∴ एकंदर बेरीज − क्षय − २ य^{२}.

चवथें, २ अ + २ ब, अ + ३ ब, ५अ + ब, आणि ८ अ + ब. ह्यांची बेरीज कर.

उत्तर, १६ अ + ७ ब.

पांचवें, २क्ष− ४ य, − ३ क्ष + य, ६ क्ष− ५ य, आणि २य−क्ष, ह्यांची बेरीज कर.

उत्तर, क्ष-६य.

साहावें, क्ष^2+क्षय-२ य^2, ३ क्षय - य^2 - ४ क्ष^2, ५ य^2 - क्ष^2 - ६ क्षय, आणि ३ क्ष^2 - क्षय + ३ य^2, यांची बेरीज कर.

उत्तर, क्ष^2 - ३ क्षय + ५ य^2.

सातवें, अक्ष^3 + बक्ष^2 - कक्ष, २ अक्ष^3 + ४ कक्ष - ५ बक्ष^2, आणि २ बक्ष^2 - अक्ष^3 - ८ कक्ष, यांची बेरीज कर.

उत्तर, २ अक्ष^3 - २ बक्ष^2 - ५ कक्ष.

आठवें, अ - ब व अ + ब; क्ष^2 + क्षय व क्षय + य^2; आणि य^2 - क्षझ व क्षझ - झ^2; यांची बेरीज कर.

उत्तर, २ अ; क्ष^2 + २ क्षय + य^2; आणि य^2 - झ^2.

वजाबाकी.

(४) समजा कीं, अजवळ ३ क्षरुपये आहेत, व तो ते कधीं खर्चीत नाहीं. आणि बजवळ २ क्षरुपये आहेत, व तो दररोज क्षरुपये खर्चतो. ह्या उदाहरणांत अचा पैसा दररोज बच्यापेक्षां किती वाढत चालला हें पाहावयाचें आहे.

	१ दिवस	२ दिवस	३ दिवस	४ दिवस	५ दिवस.
अचापैसा	३ क्ष	३ क्ष	३ क्ष	३ क्ष	३ क्ष
बचापैसा	२ क्ष	क्ष	० क्ष	- क्ष	- २ क्ष
बाकी	क्ष	२ क्ष	३ क्ष	४ क्ष	५ क्ष

ह्या सर्व बाक्या अचापैसा दररोज बच्यापैशापेक्षां किती अधिक होत चालला हें दाखवितात, व ह्या वजाबाकीनें निघाल्या आहेत; परंतु ज्या रकमा वजा करावयाच्या आहेत, त्यांचीं चिन्हें पहिल्यानें बदललीं असतां त्याच बाक्या बेरजेनेंही येतील;

ह्मणजे,

	१ दिवस	२ दिवस	३ दिवस	४ दिवस	५ दि०
अचापैसा	३ क्ष	३क्ष	३ क्ष	३ क्ष	३ क्ष
बचापैसा	—२ क्ष	- क्ष	-०क्ष	+ क्ष	+ २ क्ष
बाकी	क्ष	२ क्ष	३ क्ष	४ क्ष	५ क्ष

ह्यावरून बीजपदें वजा करण्याचा जो **नियम** सिद्ध होतो तो लिहितों. तो **नियम** हा कीं, जीं पदें वजा करावयाचीं असतील त्यांचीं चिन्हें **पालटलीं**, असें पहिल्यानें मनांत आणून मिळवणीच्या रीतीप्रमाणें उदाहरण करावें.

(५) कोणत्याही पदाच्यापूर्वीं - हें चिन्ह असलें ह्मणजे तें सर्व पद वजा करावयाचें आहे असें समजावें. जसें, अ - (ब + क); ह्याचा अर्थ असा आहे कीं, (ब + क) हे अ मध्यें वजा करावयाचे आहेत, म्हणून अ - (ब + क) = अ - ब - क. तसेंच, अ - (ब - क + ड) = अ - ब + क - ड आणि क्ष - { अ - (ब - क) } = क्ष - {अ - ब + क } = क्ष - अ + ब - क.

उदाहरणें.

पहिलें, ४ अ - ८ ब - २ क ह्यांतून अ + २ ब - ५ क हे वजा कर.

वजाबाकीचे नियमाप्रमाणें,

४ अ - ८ ब - २ क	+ ४ अ - १ अ = + ३ अ
अ + २ ब - ५ क	- ८ ब - २ ब = - १० ब
	- २ क + ५ क = + ३ क

उत्तर, ३ अ-१० ब+३ क

ताळा. ४ अ-८ ब-२ क

दुसरें, २ मक्ष^{२} - नक्ष^{२} - ३ पय + र ह्यांतून ५ मक्ष^{२} - ४ नक्ष + पय + क हें वजा कर.

बजाबाकीचे नियमाप्रमाणें

२ मक्ष^2 - नक्ष - ३ प य + र
५ म क्ष^2 - ४ नक्ष + पय + क

उ० -३मक्ष^2+३नक्ष-४पय+र-क

२ मक्ष^2 -५ मक्ष^2=-३ मक्ष^2
- नक्ष +४ नक्ष=+३ नक्ष
- ३पय-१ पय=-४ पय
आणि र-क=र-क

तिसरें, ६ अ + २ ब - (३ अ + ब) ह्यांतून २ अ + ४ ब - (४ अ - ब) हें वजा कर.

६ अ+२ब-३अ-ब
२ अ+४ब-४अ+ब
---
४ अ-२ब+अ-२ब=
५ अ-४ब. हें उत्तर.

येथें -(३अ+ब)आणि-(४अ-ब) हे लिहावयाच्या वेळेस कौंसाच्या बाहेर उणें चिन्ह आहे म्हणून आंतील पदांचीं चिन्हें पहिल्यानें बदलावीं.

चवथें, ५ अ-६ ब-३ क ह्यांतून २ अ + ३ ब - ७ क हे वजाकर. उत्तर, ३ अ - ९ ब + ४ क.

पांचवें, क्ष^2 - क्षय ह्यांतून क्षय - य^2 हे वजा कर आणि अ + ब ह्यांतून अ - ब हे वजा कर.

उत्तर. क्ष^2 - २ क्षय + य^2 आणि २ ब.

साहावें, ५ न^2 + न - ३ ह्यांतून ४ न^2 - ३ न - २ हे वजा कर.

उत्तर, न^2 + ४ न - १.

सातवें, अय^2 - ७ अ^{2}य - अ - क ह्यांतून + ३ अय^2- २ अ^{2}य + अ - ब हे वजा कर.

उत्तर, - २ अ य^2 - ५ अ^2 य - २ अ - क + ब.

आठवें, अ^3 - अ^2 ब + २ अब^2 - ब^3 ह्यांतून २ अ^{2}ब - अ ब^2 हे वजा कर.

उत्तर, अ^3 - ३ अ^2 ब + ३ अब^2 - ब^3.

गुणाकार.

(१) ३ + २ ह्यांस ४ ह्यांनीं गूण.

३ + २ = ५ आणि ५ × ४ = २० हें उत्तर.

अथवा प्रकारांतरानें,

(३ + २) × ४ = ३ × ४ + २ × ४ = १२ + ८ = २०
हें उत्तर.

अ + ब ह्यांस ड आणि क ह्यांनीं गुणून त्या दोन्ही गुणाकारांची बेरीज कर.

(अ + ब) × क = अक + बक
(अ + ब) × ड = अड + बड

अक + बक + अड+बड हें उ०.

ही गुणाकारांची बेरीज व अ + ब ह्यांस क + ड ह्यांनीं गुणिल्यास जो गुणाकार येतो तो ह्या दोहोंत भेद नाहीं; म्हणजे,

अ + ब
क + ड
अक + बक
+ अड + बड
अक + बक + अड + बड

येथें अ + ब ह्यांस पहिल्यानें क नें गुणिलें, आणि मग ड नें गुणिलें, नंतर त्या दोन्ही गुणाकारांची बेरीज घेतली.

५ − ३ ह्यांस ६ ह्यांनीं गुण.

५ − ३ = २ आणि २ × ६ = १२ हें उत्तर.

अथवा (५ − ३) × ६ = ५ × ६ − ३ × ६ = ३० − १८ = १२ हें उत्तर.

अ + ब ह्यांस क आणि ड ह्यांनीं गुण. आणि पहिल्या गुणाकारांतून दुसरा गुणाकार वजा कर.

(अ − ब) × क = अक − बक
(अ − ब) × ड = अड − बड

अक−बक−अड+बड हें उत्तर.

ही बाकी अ - ब आणि क - ड ह्यांच्या गुणाकाराबरोबर आहे; म्हणजे,

अ - ब
क - ड
अक - बक
           - अड + बड
अक - बक - अड + बड

येथें अ - ब ह्यांस पहिल्यानें क नें गुणिलें, आणि मग ड नें गुणिलें, नंतर त्या दोन्ही गुणाकारांची बेरीज घेतली.

ह्या उदाहरणाचा विचार करून पाहिला असतां लागलेंच लक्षांत येतें कीं, + ह्यास + ह्यानें गुणिलें असतां गुणाकार + यता; - ह्यास - ह्यानें गुणिलें असतां गुणाकार + येतो; + ह्यास - ह्यानें किंवा - ह्यास + ह्यानें गुणिलें असतां गुणाकार - येतो; म्हणजे असा नियम निघतो कीं, सरूप चिन्हांचा गुणाकार + येतो आणि विरूप चिन्हांचा गुणाकार - येतो.

२ क्ष ह्यांस ३ ह्यांनीं गूण.

२ क्ष × ३ = २ क्ष ची तिप्पट = २ क्ष + २ क्ष + २ क्ष = ६ क्ष.

अथवा, २ × क्ष × ३ = ६ क्ष.

२ ह्या वेळांप्रकाशकास ३ ह्या गुणकानें गुणून त्या गुणाकारापुढें क्ष लिहिला म्हणजे वरलें उत्तर येईल.

५ अ ह्यांस २ ब ह्यांनीं गूण.

५ × अ × २ × ब = ५ × २ × अ × ब = १० अब.

५ आणि २ ह्या वेळांप्रकाशकांच्या गुणाकारापुढें अ आणि ब हीं अक्षरें लिहावीं म्हणजे वरलें उत्तर येईल.

अ^{२} ह्यास अ^{३} ह्यानें गूण.

अ^{२} = अ × अ, आणि अ^{३} = अ × अ × अ.

$\therefore अ^{२} \times अ^{३} = अ \times अ \times अ \times अ \times अ = अ^{५}$.

अथवा, $अ^{२} \times अ^{३} = अ^{२+३} = अ^{५}$

२ आणि ३ ह्या घातप्रकाशकांची बेरीज अ पदाच्या घातप्रकाशकाच्या स्थानीं लिहावी, म्हणजे वरलें उत्तर येईल.

जेथें घातप्रकाशक लिहिला नाहीं, तेथें १ हा घातप्रकाशक आहे असें समजावें. जसें, $अ = अ^{१}$.

ह्यावरून गुणाकाराचे जे सामान्य नियम सिद्ध होतात ते खालीं लिहितों.

गुण्य गुणक पदांचीं चिन्हें **सरूप** असतील तर गुणाकारास + चिन्ह लिहावें; व तीं **विरूप** असतील तर - चिन्ह लिहावें. गुण्य गुणक पदांच्या वेळाप्रकाशकांचा गुणाकार घ्यावा. गुण्यगुणक पदांत एकच अक्षर असेल तर, त्यांच्या घातप्रकाशकांची बेरीज घ्यावी.

उदाहरणें.

पहिलें. $३ अ^{२} - ५ अ ब + २ ब^{२}$ ह्यांस $अ^{२} - ७ अ ब$ ह्यांनीं गूण.

$$
\begin{array}{l}
३ अ^{२} - ५ अब + २ ब^{२} \\
अ^{२} - ७ अब \\
\hline
३ अ^{४} - ५ अ^{३}ब + २ अ^{२}ब^{२} \\
\qquad - २१ अ^{३}ब + ३५ अ^{२}ब^{२} - १४ अब^{३} \\
\hline
३ अ^{४} - २६ अ^{३}ब + ३७ अ^{२}ब^{२} - १४ अब^{३}
\end{array}
$$

हें उत्तर.

दुसरें. $अ^{न} - अ^{न-१}ब + अ^{न-२}ब^{न}$ ह्यांस $अ - ब$ ह्यांनीं गुण.

$$
\begin{array}{l}
अ^{न} - अ^{न-१}ब + अ^{न-२}ब^{न} \\
अ - ब \\
\hline
अ^{न+१} - अ^{न}ब + अ^{न-१}ब^{न}
\end{array}
$$

$$- अ^{न}ब + अ^{न-१}ब^{२} - अ^{न-२}ब^{न+१}$$

$$अ^{न-१} - २अ^{न}ब + अ^{न-१}ब^{न} + अ^{न-१}ब^{२} - अ^{न-२}ब^{न+१}$$

हें उत्तर.

तिसरें. ६ $अ^{२}$ ह्यांस ४ ह्यांनीं; ३ अ ह्यांस ५ ब ह्यांनीं; आणि $क्ष^{४}$ ह्यांस $क्ष^{२}$ ह्यानें गूण.

उत्तर. २४ अ; १५ अब; आणि $क्ष^{६}$.

चवथें. २ $क्ष^{२}$ - ४ य + ज्ञ ह्यांस ३ क्ष ह्यांनीं; आणि $अ^{२}$ + २ अब - $ब^{२}$ ह्यांस $अ^{३}ब^{२}$ ह्यांनीं गूण.

उत्तर. ६ $क्ष^{३}$ - १२ क्षय + ३ क्षज्ञ; आणि $अ^{५}ब^{२}$ + २ $अ^{४}ब^{३}$ - $अ^{३}ब^{४}$.

पांचवें. $क्ष^{३}$ - $क्ष^{२}$य + क्ष$य^{२}$ - $य^{३}$ ह्यांस क्ष + य ह्यांनीं; आणि $अ^{२}$ + $ब^{२}$ + $क^{२}$ + अ ब - अ क + ब क ह्यांस अ - ब + क ह्यांनीं गूण.

उत्तर. $क्ष^{४}$ - $य^{४}$; आणि $अ^{३}$ - $ब^{३}$ + $क^{३}$ + ३ अ ब क.

साहावें. ५ $क्ष^{३}$ + ४ $क्ष^{२}$ + ३ क्ष + २ ह्यांस ५ $क्ष^{३}$ - ४ $क्ष^{२}$ ह्यांनीं; आणि १ - क्ष + $क्ष^{४}$ - $क्ष^{५}$ ह्यांस १ + क्ष + $क्ष^{२}$ + $क्ष^{३}$ ह्यांनीं गूण.

उत्तर. २५ $क्ष^{६}$ - $क्ष^{४}$ - २ $क्ष^{३}$ - ८ $क्ष^{२}$; आणि १ - $क्ष^{८}$.

सातवें. अ + ब ह्यांस अ + ब ह्यांनीं, अ -ब ह्यांस अ - ब ह्यांनीं, आणि अ + ब ह्यांस अ - ब ह्यांनीं गूण; आणि तीं उत्तरें लक्ष्यांत ठेव.

उत्तर. $\begin{cases} (अ + ब)(अ + ब) = अ^{२} + २\,अब + ब^{२}; \\ (अ - ब)(अ - ब) = अ^{२} - २\,अब + ब^{२}; \\ \text{आणि } (अ + ब)(अ - ब) = अ^{२} - ब^{२}. \end{cases}$

ह्या उदाहरणावरून खालचे नियम निघतात.

१. कोणत्याही दोनसंख्यांचे बेरजेचा वर्ग, त्या दोन सं-

त्यांच्या वर्गांची बेरीज त्यांच्या गुणाकाराच्या दुपटींत मिळवून जें येतें, त्याबरोबर आहे.

२. कोणत्याही दोन संख्यांच्या वजाबाकीचा वर्ग, त्या संख्यांच्या वर्गांच्या बेरजेंत त्यांच्या गुणाकाराची दुप्पट वजा देऊन बाकी जी राहते, ती बरोबर आहे.

३. कोणत्याही दोन संख्यांच्या बेरजेचा व वजाबाकीचा गुणाकार त्यांच्या वर्गांच्या वजाबाकीबरोबर आहे.

विद्यार्थ्यांनीं ह्या तीन नियमांची चांगली आठवण धरावी.

भागाकार.

(७) भागाकार गुणाकाराची विपरीतक्रिया आहे.

$\because$ २ क्ष × ३ = ६ क्ष; $\therefore$ ६ क्ष ÷ ३, अथवा $\frac{\text{६ क्ष}}{\text{३}}$ = २ क्ष; आणि $\because$ $-५\,\text{क्ष}^{४} \times ४\,\text{क्ष}^{२} = -२०\,\text{क्ष}^{६}$; $\therefore$ $\frac{-२०\,\text{क्ष}^{६}}{४\,\text{क्ष}^{२}} = -५\,\text{क्ष}^{४}$.

ह्यावरून भागाकाराचा नियम सिद्ध होतो; तो हा कीं, भाज्यभाजकांचीं चिन्हें सरूप असल्यास भागाकारास + चिन्ह लिहावें; तीं चिन्हें विरूप असल्यास − चिन्ह लिहावें; भाज्याच्या वेळा प्रकाशकास भाजकाच्या वेळा प्रकाशकानें भागावें; आणि भाज्यभाजक पदांत एकच अक्षर असल्यास भाज्याच्या घातप्रकाशकांत भाजकाचा घातप्रकाशक वजा करावा.

उदाहरणें.

पहिलें. $-१८\,\text{अ}^{३}\text{ब}\,\text{क}^{५}$ ह्यांस $-२\,\text{अ}^{२}\text{ब}\,\text{क}^{३}$ ह्यांनीं भाग.

$$\frac{-१८\,\text{अ}^{३}\,\text{ब}\,\text{क}^{५}}{-३\,\text{अ}^{२}\,\text{ब}\,\text{क}} = ६\,\text{अ}\,\text{क}^{४}$$ हें उत्तर.

ह्या उदाहरणांत चिन्हें सरूप आहेत म्हणून भागाकाराचें

चिन्ह + समजावें; ३ हे १८ रांतून ६ वेळा जातात; २ हा घातप्रकाशक ३ ह्यांत वजा केल्यास भागाकारांतल्या अ स १ हा घातप्रकाशक उरतो; ब हा भाज्यांकांत आणि भाजकांकांत आहे, म्हणून तो भागाकारांत आला नाहीं, कारण, $\frac{ब}{ब} = १$ आहे; आणि ३ हा घातप्रकाशक पांचांतून वजा केल्यामुळें भागाकारांत क स २ घातप्रकाशक उरतो.

दुसरें. $१२\,अ^{२} क्ष^{४} य^{२} - २४\,अ\,क्ष^{३} य^{४} - १८\,क्ष^{२} य + ६\,क्ष\,य$ ह्यांस $-६\,क्ष\,य$ ह्यांनीं भाग.

$$\frac{१२\,अ^{२}क्ष^{४}य^{२} - २४\,अक्ष^{३}य^{४} - १८\,क्ष^{२}य + ६\,क्षय}{-६\,क्षय} =$$

$-२\,अ^{२} क्ष^{३} य + ४\,अक्ष^{२}य^{३} + ३\,क्ष - १$ हें उत्तर.

तिसरें. $२\,अ^{७} - ७\,अ^{६} ब + ७\,अ^{५} ब^{२} + अ^{४} ब^{३} - १५\,अ^{३} ब^{४}$ ह्यांस $२\,अ^{४} - ३\,अ^{३} ब - ५\,अ^{२} ब^{२}$ ह्यांनीं भाग.

भाजक		भागाकार
$२\,अ^{४}$	$२\,अ^{७}-७अ^{६}ब+७अ^{५}ब^{२}+अ^{४}ब^{३}-१५$	$अ^{३}$
$-३\,अ^{३}ब$	$अ^{३}ब^{४}$ $२अ^{७}-३अ^{६}ब-५अ^{५}ब^{२}$	$-२\,अ^{२}ब$
$-५\,अ^{२}ब^{२}$	$-४\,अ^{६}ब+१२अ^{५}ब^{२}+अ^{४}ब^{३}$	$+३\,अ\,ब^{२}$.
	$-४\,अ^{६}ब+६अ^{५}ब^{२}+१०अ^{४}ब^{३}$	
	$६\,अ^{५}ब^{२}-९अ^{४}ब^{३}-१५अ^{३}ब^{४}$	
	$६\,अ^{५}ब^{२}-९अ^{४}ब^{३}-१५अ^{३}ब^{४}$	

चवथें. १ ह्यास $१ + २\,क्ष + क्ष^{२}$ ह्यांनीं भाग.

$१+२क्ष+क्ष^{२}$) १ ($१-२क्ष+३क्ष^{२}-४क्ष^{३}+$इत्यादि अनंतपर्यंत.

$१ + २\,क्ष + क्ष^{२}$

$-२\,क्ष - क्ष^{२}$

$-२\,क्ष - ४\,क्ष^{२} - २\,क्ष^{३}$

$३\,क्ष^{२} + २\,क्ष^{३}$

$३\,क्ष^{२} + ६\,क्ष^{३} + ३\,क्ष^{४}$

$-४\,क्ष^{३} - ३\,क्ष^{४}$

पांचवें. $\text{अ}^{२\text{न}+१} - \text{अ}^{\text{न}+१} - \text{अ}^{\text{न}} + \text{अ}^{\text{न}-१}$ ह्यांस $\text{अ}^{\text{न}-१}$ ह्यानें भाग.

$$\frac{\text{अ}^{२\text{न}+१} - \text{अ}^{\text{न}+१} - \text{अ}^{\text{न}} + \text{अ}^{\text{न}-१}}{\text{अ}^{\text{न}-१}} = \text{अ}^{\text{न}+२} - \text{अ}^{२} - \text{अ} + १$$

ह्या भागाकारांत जें घातप्रकाशक आले आहेत ते वजाबाकीनें आले आहेत; म्हणजे,

$$\begin{array}{cccc} २\text{न}+१ & \text{न}+१ & \text{न} & \text{न}-१ \\ \underline{\text{न}-१} & \underline{\text{न}-१} & \underline{\text{न}-१} & \underline{\text{न}-१} \\ \text{न}+२ & २ & १ & ० \end{array}$$

ह्या उदाहरणावरून हें उघड आहे कीं, $\text{अ}^{०} = १$

$$\therefore \frac{\text{अ}^{\text{न}-१}}{\text{अ}^{\text{न}-१}} = \text{अ}^{०}; \text{ परंतु } \text{अ}^{\text{न}-१} \div \text{अ}^{\text{न}-१} = १ \therefore \text{अ}^{०} = १.$$

साहावें. १० अ ह्यांस २ ह्यांनीं; − १२ अक्ष ह्यांस ४ अ ह्यांनीं; २० $\text{क्ष}^{४}\,\text{य}^{३}$ ह्यांस −५ क्ष $\text{य}^{२}$ ह्यांनीं; आणि −१२० $\text{अ}^{६}\,\text{क्ष}^{२}\,\text{य}^{५}\,\text{ज्ञ}^{७}$ ह्यांस −१० $\text{अ}^{४}\,\text{क्ष}^{२}\,\text{य}^{२}\,\text{ज्ञ}^{३}$ ह्यांनीं भाग.

उत्तर. ५ अ; − ३ क्ष; − ४ $\text{क्ष}^{३}\text{य}$; आणि १२ $\text{अ}^{२}\text{य}^{३}\text{ज्ञ}^{४}$.

सातवें. ३ $\text{अ}^{३}\,\text{ब}^{२}$ − ६ $\text{अ}^{२}\,\text{ब}^{४}$ + १२ अ $\text{ब}^{६}$ क ह्यांस ३ अ $\text{ब}^{२}$ ह्यांनीं; आणि ८ $\text{क्ष}^{४}\,\text{य}^{२}$ − १२ $\text{क्ष}^{२}$ − १६ क्ष ह्यांस ४ क्ष ह्यांनीं भाग.

उत्तर. $\text{अ}^{२}$ − २ अ $\text{ब}^{२}$ + ४ $\text{ब}^{५}$ क; आणि २ $\text{क्ष}^{३}\,\text{य}^{२}$ − ३ क्ष − ४.

आठवें. $\frac{२\,\text{अक्षय} - ५\,\text{क्षय}}{\text{क्षय}}$; $\frac{-६\,\text{ब}^{२}\text{य} + ४\,\text{अबय} - २०\,\text{बय}}{-\text{बय}}$;

आणि $\frac{४ अबक्ष - ३ अ^{२}क्ष + ७ अकक्ष}{अक्ष}$.

उत्तर. २अ−५; ६ब−४अ+२०; आणि ४ब−३अ+७क.

नववें. ८ $क्ष^{२}$ + १६ अक्ष + ६ $अ^{२}$ ह्यांस ४ क्ष + २ अ ह्यांनीं; आणि $क्ष^{४}$ + $क्ष^{३}य$ + $क्षय^{३}$ + $य^{४}$ ह्यांस $क्ष^{२}$ + २ क्षय + $य^{२}$ ह्यांनीं भाग.

उत्तर. २ क्ष + ३ अ; आणि $क्ष^{२}$ − क्षय + $य^{२}$.

दाहावें. ८ $क्ष^{४}य$ + २ $क्ष^{३}य$ − २ $क्ष^{२}$ + ३ $क्ष^{२}य$ + क्ष ह्यांस ४ $क्ष^{२}य$ + २ क्षय − १ ह्यांनीं; आणि $क्ष^{४}$ − $य^{४}$ ह्यांस क्ष − य ह्यांनीं भाग.

उत्तर. २ $क्ष^{२}$ − क्ष; आणि $क्ष^{३}$ − $क्ष^{२}य$ + $क्षय^{२}$ − $य^{३}$.

अकरावें. १८ $क्ष^{३}$ − ३३ $क्ष^{२}$ + ४४ क्ष − ३५ ह्यांस ६ क्ष − ७ ह्यांनीं; आणि १ − क्ष ह्यांस १ + क्ष ह्यांनीं भाग.

उत्तर. ३ $क्ष^{२}$ − २क्ष + ५; आणि १−२क्ष + २$क्ष^{२}$−२ $क्ष^{३}$ + इ०

बारावें. $\frac{अ^{४} + २ अ^{२}ब^{२} + ब^{४}}{अ^{२} + ब^{२}}$; $\frac{क्ष^{६} - २ क्ष^{३}य^{३} + य^{६}}{क्ष^{३} - य^{३}}$

उत्तर. $अ^{२}$ + $ब^{२}$; $क्ष^{३}$ − $य^{३}$.

तेरावें. $\frac{अ^{म}ब^{न+२} - अ^{म+१}ब^{२न+१} + अ^{म+२}ब^{२न}}{अ^{म-२}ब^{न}}$;

आणि $\frac{४ अ^{८} - १}{२ अ^{४} + १}$

उत्तर. $अ^{२}ब^{२}$ − $अ^{३}ब^{न+१}$ + $अ^{४}ब^{न}$; २ $अ^{४}$ − १.

अनेकप्रकारचीं उदाहरणें.

पहिलें. क्ष = ४, य = ३, आणि झ = ६ धरून खालच्या तीन पदांच्या संख्या काढ.

(१) $क्ष^{2} + ४ य - ३ ज्ञ^{2}$. (२) $\frac{१क्ष + क्षय}{१२} - \frac{ज्ञ}{य}$

(३) $\frac{ज्ञ(ज्ञ - य)}{३} + \frac{ज्ञ}{क्ष - य}$.

दुसरें. $५ अ^{2}ब - २ अब^{2} - ३ अ^{2}ब^{2}$; $२ अ^{2}ब^{2} - ७ अ^{2}ब + ५ अब$; आणि $अ^{2}ब^{2} - अ^{2}ब$; ह्यांची बेरीज कर.

तिसरें. $२ क्ष^{3} - २ क्ष^{2} + ८ क्ष - ५$ हे $५ क्ष^{3} - क्ष^{2} - २ क्ष + १$ ह्यांत वजा कर.

चवथें. $४ क्ष^{3} क्ष^{2} - ७ अ^{2} क्ष - ३ अ$ ह्यांस $२ अ क्ष^{3} - अ^{2}$ ह्यांनीं; आणि $अ^{2} + अ ब + ब^{2}$ ह्यांस $अ - ब$ ह्यांनीं गूण.

पांचवें. $क्ष^{4} + क्ष^{2} य^{2} + य^{4}$ ह्यांस $क्ष^{2} + क्षय + य^{2}$ ह्यांनीं; आणि $क्ष^{3} + य^{3}$ ह्यांस $क्ष + य$ ह्यांनीं भाग.

साहावें. $अ \sqrt[3]{क्ष} - ब \sqrt{क्ष}$; $५ अ \sqrt[3]{क्ष} + ३ ब \sqrt{क्ष}$, $२ ब \sqrt{क्ष} - ७ अ \sqrt[3]{क्ष}$, आणि $३ अ \sqrt[3]{क्ष} + ४ ब \sqrt{क्ष}$, ह्यांची बेरीज कर; आणि $(३ अ - क्ष) क्ष$ ह्यांतून $(अ + २ क्ष) क्ष^{2}$ हे वजा कर.

सातवें. $अ^{2} - क्ष^{2}$; $अ^{2} + २ अक्ष + क्ष^{2}$; $क्ष^{4} - १$, $४अ^{4} - ९ ब^{2}$; $क्ष^{2} - ४ बक्ष + ४ ब^{2}$; आणि $अ^{२म} - ब^{२न}$; ह्यांतील प्रत्येकाचीं गुण्यगुणक पदें लिहून दाखीव.

आठवें. $अक्ष^{3} - (अ^{2} + ब) क्ष^{2} + ब^{2}$ ह्यांस $अक्ष - ब$ ह्यांनीं भाग; आणि $पक्ष^{2} + कक्ष - र$ ह्यांस $मक्ष - न$ ह्यांनीं गूण.

नववें. $अ^{2} - अ$; $मन - म$; $अब^{2} - अ$; $- बक्ष^{2} + बकक्ष^{2} - ब^{2}क्ष^{2}$; आणि $- क^{2}क्ष - बक्ष - क्ष$ ह्यांतील प्रत्येकाचीं गुण्यगुणक पदें लिहून दाखीव.

दाहावें. $मन (म + न)$; $क्षय (क्ष - य)$;

(प + र) (प − र); − (र + अब) क्ष; आणि { क्ष − + (क्ष − १) } य; ह्यांचे कौंस उडवून दाखीव.

समीकरणें.

(८) जेव्हां दोन पदें किंवा पदांचे दोन समूह परस्परांच्या बरोबर असतात तेव्हां त्यांचें समीकरण होतें; जसें, ४ × ३ = ७ + ५ हें समीकरण होय, आणि १० क्ष = ६० हें ही समीकरण आहे, ज्यांत क्ष ची किंमत ६ आहे हें उघड आहे, कारण १० × ६ = ६० आहेत; आणि जर समीकरणाच्या दोहीं बाजूंस १० ह्यांनीं भागिलें तर क्ष = ६ येतील. पुनः क्ष + ५ = १५ हें जर एक समीकरण घेतलें आणि त्याच्या दोन ही बाजूंतून ५ वजा केले तर क्ष = १० येतील. आणि क्ष − ४ = २० असें जर एक समीकरण घेतलें व त्याचे दोनही बाजूंत ४ मिळविले तर क्ष = २४ येतील. असेंच जर, $\frac{१}{४}$ क्ष = २ हें एक समीकरण घेतलें तर क्षची किंमत ८ येईल, कारण कीं ८ चा चवथा हिस्सा २ आहे; आणि जर समीकरणाच्या दोनही बाजूंस ४ नीं गुणिलें तर क्ष = ८ येतील.

क्ष + २ अ = ८ अ − २ क्ष असें एक दिलेलें समीकरण आहे.

ह्या समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंत २ क्ष मिळविल्यानें,

क्ष + २ क्ष + २ अ = ८ अ.

ह्याचे दोन्ही बाजूंतून २ अ वजा केल्यानें,

क्ष + २ क्ष = ८ अ − २ अ.

मूळ समीकरणाची आणि ह्याची तुलना करून पाहिलें असतां असें दिसलें कीं, २ क्ष आणि २ अ ह्यांचीं चिन्हें बदलून त्यांस स्थलांतर केलें, म्हणजे त्यांस एका बाजूंतून काढून दुसऱ्या बाजूंस नेलें.

आतां ∵ क्ष + २ क्ष = ३ क्ष, आणि ८ अ - २ अ = ६ अ; ∴ ३ क्ष = ६ अ.

ह्या समीकरणाचे प्रत्येक बाजूस ३ ह्यांनीं भागल्यानें,

क्ष = २ अ येतात, ही क्ष अव्यक्तपदाची किम्मत होय.

ह्यावरून असें दिसतें कीं, समीकरणांत कोणत्याही पदाचें चिन्ह बदलून स्थळांतर केलें असतां चिंता नाहीं, आणि समीकरणाच्या एके बाजूंत जो फार फेर करावा तोच समानता राखण्याकरितां दुसऱ्या बाजूंत केला पाहिजे.

हीं पुढील समीकरणें सोडीव.

१. क्ष + ३ = १८ - ४ क्ष उत्तर. क्ष = ३.

२. क्ष + ३ अ = १८ अ - ४ क्ष. उत्तर. क्ष = ३ अ.

३. ४ क्ष - ३ अ = ३क्ष + ३ ब. उत्तर. क्ष = ३ (अ + ब)

४. ७ + ६ क्ष - ४ = १२ + ३ क्ष. उत्तर. क्ष = ३.

५. ४ (क्ष - २) = १० क्ष - ३८. उत्तर. क्ष = ५.

६. अक्ष + क = अ - बक्ष. उत्तर. $क्ष = \frac{अ - क}{अ + ब}$.

७. $\frac{य}{१२} - ८ = - ६$ उत्तर. य = २४.

८. ५ अज्ञ - १ = ३ अ (ज्ञ + ब) उत्तर. $ज्ञ = \frac{३ अब + १}{२ अ}$.

प्रश्न.

१. एके मनुष्यानें २१ रुपयांस वांसरासुद्धां एक गाय विकत घेतली, व त्यांत गाईची किंमत वांसराच्या सहापट होती; तर एकेकाची किंमत काय ?

वांसराची किंमत दाखवायास क्ष रुपये घे;

तर ∵ गाईची किंमत वांसराचे सहापट आहे.

∴ ६ क्ष ही तिची किंमत आहे.

परंतु, प्रश्नाप्रमाणें गाईची किंमत + वांसराची किंमत = २१ रुपये आहेत.

∴ ६ क्ष + क्ष = २१

म्हणजे, ७ क्ष = २१

∴ क्ष = ३ रुपये = वांसराची किंमत.

आणि ६ क्ष = १८ रुपये = गाईची . . . .

२. अजवळ १०० रुपये होते आणि बजवळ ४८ रुपये होते; बनें कांहीं पैसा लोकांस वांटला, आणि अनें त्याच्या दुप्पट वांटला, आणि मग अजवळ बच्या तिप्पट पैसा राहिला तर एकेकानें किती किती पैसा वाटला ?

बनें जे रुपये वांटलें ते = क्ष घे.

तर अनें . . . . = २ क्ष.

आतां प्रत्येकाचा पैसा - त्यानें जितका पैसा वांटला तो = त्याजवळ जी बाकी राहिली ती.

∴ १०० - २ क्ष = अजवळची बाकी,

आणि ४८ - क्ष = ब . . . .

परंतु प्रश्नांत सांगितलें आहे कीं, अची शिलक बच्या शिलकेच्या तिप्पट आहे.

∴ १०० - २ क्ष = ३ (४८ - क्ष) = १४४ - ३ क्ष,

स्थळांतरानें, ३ क्ष - २ क्ष = १४४ - १००;

म्हणजे, क्ष = ४४ रुपये = बनें वांटलेला पैसा,

आणि २ क्ष = ८८ रुपये = अनें . . . . . .

३. अ, ब, आणि क ह्या तिघांस ६०० रुपये वांटून दे, ते असें कीं, अच्या हिशाच्या दुप्पट बस मिळतील, आणि अ आणि ब ह्या दोघांच्या हिशांचे बेरजेबरोबर कस मिळतील.

उत्तर. अ १०० रुपये, ब २०० रु०, आणि क ३०० रु०

४. अशा दोन संख्या काढ कीं, ज्यांची वजाबाकी ७ असावी, आणि मोठ्या संख्येच्या तिपटीची आणि धाकट्या संख्येच्या आठपटीची वजाबाकी ६ असावी.

उत्तर. १० आणि ३.

५. एक मजूर आणि त्याचा मुलगा हे दोघे मिळून ९६ रुपये मिळवितात, परंतु मजुरास मुलाच्या पांचपट मिळतात; तेव्हां एकेक किती किती मिळवितो ?

उत्तर. मजूर ८० रु०, मूल १६ रु०

६. लोखंडी सडक बांधायाच्या कामांत अ आणि ब ह्या दोहों मनुष्यांनीं सारखा पैसा घातला; त्यांत अ स ३०० रुपये नफा झाला, आणि ब स ४५० रुपये तोटा झाला, नंतर पाहातात तों ब च्या साहापट पैसा अ जवळ झाला; तेव्हां एकेकानें किती किती पैसा घातला ?

उत्तर. ६०० रुपये.

७. अ फूट लांबीची एक दोरी आहे तिचे असे दोन तुकडे करावयाचे आहेत कीं, एक तुकडा दुसऱ्या तुकड्याच्या लांबीच्या ब पट लांब होईल; तेव्हां एकेका तुकड्याची लांबी किती ?

उत्तर. { धाकटा तुकडा $= \dfrac{\text{अ}}{\text{ब}+\text{१}}$ फूट,
आणि मोठा तुकडा $= \dfrac{\text{अब}}{\text{ब}+\text{१}}$ फूट.

जेव्हां अ = २० आणि ब = ४ तेव्हां त्या तुकड्यांची लांबी किती आहे.

उत्तर. ४ आणि १६.

प्रकरण २.

अपूर्णबीजपद.

(९) बीजांतील अपूर्ण पदें आणि अंकगणितांतील अपूर्णांक ह्यांचें स्वरूप एकच आहे, म्हणून एकास जे नियम लागू पडतात तेच दुसऱ्यासही लागू पडतात. असें समज कीं, एका

नारिंगाच्या फळाचे ब संख्ये इतके सारखे तुकडे करून त्यांपैकीं अ तुकडे घ्यावयाचे आहेत तर ते तुकडे, त्याचे आठ सारखे तुकडे करून त्यांपैकीं पांच तुकडे घ्यावयाचे असले म्हणजे ते जसे $\frac{५}{८}$ ह्या अपूर्ण संख्येनें दाखवितों, तसेंच $\frac{\text{अ}}{\text{ब}}$ ह्या अपूर्ण पदानें दाखवितों.

∵ $\frac{\text{अ}}{\text{ब}}$ हें अपूर्ण पद अ स ब नें भागून जो भागाकार येतो तो दाखवितें, आणि ∵ भागाकार × भाजक = भाज्य

$$\therefore \frac{\text{अ}}{\text{ब}} \times \text{ब} = \text{अ};$$

म्हणजे, जर आपण एखाद्या अपूर्ण पदास त्याचे छेदानें गुणिलें, तर आपणास त्या पदाचा अंश कळतो.

वरील समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंस न नें गूण, तर

$$\text{नब} \times \frac{\text{अ}}{\text{ब}} = \text{नअ}$$

$$\therefore \frac{\text{अ}}{\text{ब}} = \frac{\text{नअ}}{\text{नब}};$$

म्हणजे, कोणत्याही अपूर्णपदाचे अंश आणि छेद ह्यांस एकाच पदानें गुणिलें असतां त्याची किंमत बदलत नाहीं.

कुरलरी. ∵ $\frac{\text{नअ}}{\text{नब}} = \frac{\text{अ}}{\text{ब}}$, ∴ कोणत्याही अपूर्णपदाचे अंशास आणि छेदास एकाच संख्येनें भागिलें असतां त्याची किंमत बदलत नाहीं.

उदाहरणें.

१. $\frac{\text{क्ष}}{२}$ ह्यांस २ ह्यांनीं; $\frac{\text{क्ष}}{३}$ ह्यांस १२ ह्यांनीं; $\frac{\text{३य}}{५}$ ह्यांस १५ ह्यांनीं; आणि $\frac{\text{३य}}{४}$ ह्यांस ५ ह्यांनीं गूण.

$\frac{\text{क्ष}}{२} \times २ = \text{क्ष}$, ∵ कोणत्याही वस्तूच्या अर्धाची दुप्पट = ती सर्व वस्तू.

$\frac{\text{क्ष}}{३} \times १२ = ४\ \text{क्ष}$. ∵ कोणत्याही वस्तूच्या तृतीयांशाची १२ पट=१२ तृतीयांश=त्या वस्तूचीं४पट. त्यावरून असें दिसतें कीं, आपणास कोणत्याही अपूर्णपदास एकाद्या संख्येनें गुणायाचें आहे तर गुणायाचे पूर्वीं त्या संख्येस अपूर्णपदाचे छेदानें (जर निःशेष भागितां येईल तर) भागिलें असतां चिंता नाहीं.

$\frac{२\ \text{य}}{५} \times १५ = ६\ \text{य}$, ∵ $\frac{२}{५}$ शांची १५ पट = $\frac{३०}{५} = ६$.

अथवा ∵ $१५ \div ५ = ३$, आणि $२\ \text{य} \times ३ = ६\ \text{य}$.

$\frac{३\text{य}}{४} \times ५\ \text{क्ष} = \frac{१५\text{क्षय}}{४}$, ∵ $\frac{३}{४}$ शांची ५ पट = $\frac{१५}{४}$,

आणि $\text{य} \times \text{क्ष} = \text{क्षय}$.

२. $\frac{\text{क्ष}}{३} + \frac{३\ \text{क्ष}}{४} - \frac{५\ \text{क्ष}}{६} + \frac{३\ \text{क्ष}}{८} - \frac{७\ \text{क्ष}}{१२}$ ह्यांस २४ ह्यांनीं गूण, आणि त्या गुणाकाराची बेरीज घे.

उत्तर. $८\ \text{क्ष} + १८\ \text{क्ष} - २०\ \text{क्ष} + ९\ \text{क्ष} - १४\ \text{क्ष} = \text{क्ष}$.

३. $\frac{३\ \text{य}}{२} - \frac{२\ \text{य}}{५} - \frac{\text{य}}{४} + \frac{७\ \text{य}}{१०} - \frac{५\ \text{य}}{४}$ ह्यांस २० ह्यांनीं गूण, आणि त्या गुणाकारांची बेरीज घे.

उत्तर. ६ य.

४. $\frac{४}{\text{क्ष}} - \frac{७}{२\text{क्ष}} + \frac{३}{८\text{क्ष}} - \frac{९}{४\text{क्ष}} + \frac{३}{२}$ ह्यांस ८ क्ष ह्यांनीं गूण, आणि त्या गुणाकारांची बेरीज घे.

उत्तर. १२ क्ष − ११.

५. $\frac{\text{क्ष}}{५} + \frac{५}{\text{क्ष}} - \frac{\text{क्ष}}{१०} - \frac{२}{\text{क्ष}^{२}} + ३$ ह्यांस $१०\ \text{क्ष}^{२}$ ह्यांनीं गूण.

उत्तर. $\text{क्ष}^{३} + ३०\ \text{क्ष}^{२} + ५०\ \text{क्ष} - २०$.

हीं उदाहरणें केल्यानें विद्यार्थ्यांस समीकरणांचे छेद सोडवितां येतील.

दृढभाजक.

(१०) कोणत्याही पदाचा भाजक[*] तोच होय कीं ज्यानें त्या पदास भागिलें असतां भागाकार निःशेष येतो. जसें, २ हा २ अ चा भाजक आहे; अ क्ष हा अ $क्ष^{२}$ ह्याचा भाजक आहे; अ + ब हा (अ + ब) अ ह्याचा भाजक आहे.

दोन किंवा अधिक पदांचा **सामान्य भाजक** तोच होय, कीं ज्यानें त्या पदास भागिलें असतां भागाकार निःशेष येतो; आणि त्याचा दृढभाजक तोच होय कीं, जो त्याच्या सामान्य भाजकांमध्यें अति मोठा असतो. जसें, अ हा २ अ, ६ $अ^{२}$क्ष आणि ४ अ$क्ष^{२}$, ह्यांचा सामान्य भाजक आहे; आणि त्यांचा दृढभाजक २ अ हा आहे. असेंच, ३ (अ+ब) हा ६ $(अ + ब)^{२}$, ९ ($अ^{२}$-$ब^{२}$), आणि १२ ($अ^{३}$-$ब^{३}$) ह्यांचा दृढभाजक आहे, कारण ६ $(अ+ब)^{२}$ = ६ (अ+ब) (अ + ब), ९ ($अ^{२}$ - $ब^{२}$) = ९ (अ + ब) (अ - ब), आणि १२ ($अ^{३}$ - $ब^{३}$) = १२ (अ+ब) ($अ^{२}$-अब+$ब^{२}$); येथें ३ (अ + ब) हा दृढभाजक आहे, हें उघडच आहे.

ह्याप्रकारें पदांचे निरनिराळे तुकडे करण्याची रीति विद्यार्थीस त्या पदांचा दृढभाजक काढण्यास फार उपयोगीं पडते.

उदाहरणें.

१. $क्ष^{२}$ + २ क्ष - ३ आणि $क्ष^{२}$ + ५ क्ष + ६ ह्यांचा दृढभाजक काढ.

---

[*] येथें भाजक हा शब्द बरोबर नाहीं. कारण, त्याचा अर्थ ज्यानें आपण भागतों तो इतकाच आहे, म्हणून सामान्य माप किंवा दुसरा काहीं तरी वरील अर्थसूचक शब्द असावा; परंतु हा शब्द फार दिवस प्रचारांत आहे म्हणून तोच येथें घेतला आहे.

$$क्ष^{२} + २ क्ष - ३ = क्ष^{२} + ३ क्ष - क्ष - ३ = (क्ष + ३) क्ष - (क्ष + ३) = (क्ष - १) (क्ष + ३)$$

$$क्ष^{२} + ५ क्ष + ६ = क्ष^{२} + ३ क्ष + २ क्ष + ६ = क्ष (क्ष + ३) + २ (क्ष + ३) = (क्ष + २) (क्ष + ३)$$

$\therefore$ क्ष + ३ हा त्यांचा दृढभाजक आहे.

$क्ष^{२} + २ क्ष - ३$ आणि $क्ष^{२} + ५ क्ष + ६$ हीं जर एकाद्या अपूर्ण पदार्थीं अंशछेदात्मक पदें असतील तर त्यांच्या अंशास आणि छेदास ह्यांच्या क्ष + ३ ह्या दृढभाजकानें भागिलें असतां त्या अपूर्णपदास अतिसंक्षेपरूप देतां येईल; ह्मणजे,

$$\frac{क्ष^{२} + २ क्ष - ३}{क्ष^{२} + ५ क्ष + ६} = \frac{(क्ष + ३) (क्ष - १)}{(क्ष + ३) (क्ष + २)} = \frac{क्ष - १}{क्ष + २}$$

= ह्या अपूर्णपदाचें अतिसंक्षेपरूप.

२. $\frac{क्ष^{३} - ६ क्ष^{२} + ११ क्ष - ६}{क्ष^{३} + ४ क्ष^{२} + क्ष - ६}$ ह्या अपूर्णपदाच्या अंशछेदांचा दृढभाजक काढ, आणि ह्यास अतिसंक्षेपरूप दे.

$$\frac{क्ष^{३} - ६ क्ष^{२} + ११ क्ष - ६}{क्ष^{३} + ४ क्ष^{२} + क्ष - ६} = \frac{क्ष^{३} - क्ष^{२} - ५ क्ष^{२} + ५ क्ष + ६ क्ष - ६}{क्ष^{३} - क्ष^{२} + ५ क्ष^{२} - ५ क्ष + ६ क्ष - ६}$$

$$= \frac{क्ष^{२}(क्ष - १) - ५क्ष(क्ष - १) + ६(क्ष - १)}{क्ष^{२}(क्ष - १) + ५क्ष(क्ष - १) + ६(क्ष - १)} = \frac{(क्ष - १)(क्ष^{२} - ५क्ष + ६)}{(क्ष - १)(क्ष^{२} + ५क्ष + ६)}$$

$= \frac{क्ष^{२} - ५क्ष + ६}{क्ष^{२} + ५क्ष + ६}$ हें त्या अपूर्णपदाचें अति संक्षेपरूप, आणि क्ष − १ हा दृढ भाजक.

३. $\frac{क्ष^{२} - ९क्ष + २०}{क्ष^{२} + ६क्ष - ५५}$ ह्या अपूर्णपदाच्या अंश छेदाचा दृढभाजक काढून ह्यास अतिसंक्षेपरूप दे.

$$\frac{क्ष^{२} - ९ क्ष + २०}{क्ष^{२} + ६ क्ष - ५५} = \frac{क्ष^{२} - ५ क्ष - ४ क्ष + २०}{क्ष^{२} - ५ क्ष + ११ क्ष - ५५}$$

$$=\frac{\text{क्ष}(\text{क्ष}-५)-४(\text{क्ष}-५)}{\text{क्ष}(\text{क्ष}-५)+११(\text{क्ष}-५)}=\frac{(\text{क्ष}-५)(\text{क्ष}-४)}{(\text{क्ष}+११)(\text{क्ष}-५)}=\frac{\text{क्ष}-४}{\text{क्ष}+११}$$ हें त्या अपूर्णपदाचें अतिसंक्षेपरूप, आणि क्ष - ५ हा दृढ भाजक.

४. $\frac{\text{क्ष}^{४}+\text{क्ष}^{२}\text{य}^{२}+\text{क्ष}^{२}\text{य}+\text{य}^{३}}{\text{क्ष}^{४}-\text{य}^{४}}$ ह्या अपूर्णपदाचे अंश छेदांचा दृढ भाजक काढून ह्यास अतिसंक्षेपरूप दे.

$$\frac{\text{क्ष}^{४}+\text{क्ष}^{२}\text{य}^{२}+\text{क्ष}^{२}\text{य}+\text{य}^{३}}{\text{क्ष}^{४}-\text{य}^{४}}=\frac{\text{क्ष}^{२}(\text{क्ष}^{२}+\text{य}^{२})+\text{य}(\text{क्ष}^{२}+\text{य}^{२})}{(\text{क्ष}^{२}+\text{य}^{२})(\text{क्ष}^{२}-\text{य}^{२})}=\frac{\text{क्ष}^{२}+\text{य}}{\text{क्ष}^{२}-\text{य}^{२}}$$

हें त्या अपूर्णपदाचें अतिसंक्षेपरूप, आणि $\text{क्ष}^{२}+\text{य}^{२}$ हा दृढ भाजक.

५. $\frac{\text{अब}+२\text{अ}^{२}-३\text{ब}^{२}-४\text{बक}-\text{अक}-\text{क}^{२}}{९\text{अक}+२\text{अ}^{२}-५\text{अब}+४\text{क}^{२}+८\text{बक}-१२\text{ब}^{२}}$

ह्याअपूर्णपदाचे अंशछेदांचा दृढभाजक काढून ह्यास अतिसंक्षेप रूपदे.

$$\frac{\text{अब}+२\text{अ}^{२}-२\text{ब}^{२}-४\text{बक}-\text{अक}-\text{क}^{२}}{९\text{अक}+२\text{अ}^{२}-५\text{अब}+४\text{क}^{२}+८\text{बक}-१२\text{ब}^{२}}=$$

$$\frac{२\text{अ}^{२}+\text{अक}+३\text{अब}-२\text{अब}-\text{बक}-३\text{ब}^{२}-२\text{अक}-\text{क}^{२}-३\text{बक}}{२\text{अ}^{२}-८\text{अब}+८\text{अक}+\text{अक}-४\text{बक}+४\text{क}^{२}+३\text{अब}-१२\text{ब}^{२}+१२\text{बक}}$$

$$=\frac{\text{अ}(२\text{अ}+\text{क}+३\text{ब})-\text{ब}(२\text{अ}+\text{क}+३\text{ब})-\text{क}(२\text{अ}+\text{क}+३\text{ब})}{२\text{अ}(\text{अ}-४\text{ब}+४\text{क})+\text{क}(\text{अ}-४\text{ब}+४\text{क})+३\text{ब}(\text{अ}-४\text{ब}+४\text{क}}$$

$$=\frac{(\text{अ}-\text{ब}-\text{क})(२\text{अ}+\text{क}+३\text{ब})}{(\text{अ}-४\text{ब}+४\text{क})(२\text{अ}+\text{क}+३\text{ब})}=\frac{\text{अ}-\text{ब}-\text{क}}{\text{अ}-४\text{ब}+४\text{क}}$$ हें त्या अपूर्णपदाचें अतिसंक्षेपरूप, आणि (२ अ + क + ३ ब) हा दृढभाजक.

(११) जेव्हां एक पद दुसऱ्या पदांत बाकी न राहतां कितीएकवेळां जातें तेव्हां त्या दुसऱ्या पदास पहिल्या पदाची तितकीपट आहे असें ह्मणतात; जसें ६.अ हे २ अची ३पट आहे, आणि नक्ष ही क्षची नपट आहे.

जर एक पद दुसऱ्या पदास निःशेष भागितें तर तें पद त्या दुसऱ्या पदाच्या कोणत्याही पटीसही निःशेष भागील. असें समज कीं ब, अमध्यें मवेळां जातो, तर अ = मब, आणि न अ ही अची नपट आहे, तर नअ = नमब; ह्मणून ब, न अमध्यें नम वेळां जातो.

जर एक पद दुसऱ्या दोन पदांस निःशेष भागितें तर तें पद त्यांच्या बेरजेस आणि वजाबाकीसही निःशेष भागील. जर क्ष, अमध्यें मवेळां, आणि बमध्यें नवेळां जातो, तर अ= म क्ष, आणि ब = नक्ष, ∴ अ ± ब = मक्ष ± नक्ष. = (म± न) क्ष; ह्मणून (अ+ब) ह्या बेरजेत क्ष, (म+ न) वेळां जातो, आणि (अ - ब) ह्या वजाबाकींत (म - न) वेळां जातो.

आतां आपणास दोन संख्यांचा दृढभाजक काढण्याचा एक साधारण नियम बांधितां येईल.

ज्या दोन संख्यांचा दृढभाजक काढायाचा आहे त्या दाखविण्यास अ आणि ब घे आणि ज्यांत अ > ब ह्मणजे अ, बपेक्षां अधिक आहे असें मान.

असें समज कीं, ब, अमध्यें पवेळां जाऊन बाकी क राहतो; तर अ = पब + क;

आणखी असें समज कीं क, बमध्यें क्र वेळां जाऊन बाकी ड राहतो; तर ब = क्र क + ड.

आणखी असें समज कीं ड, कमध्यें र वेळां जाऊन बाकी० राहते, तर क = डर.

ब) अ (प
पब
―――
क) ब (क्र
कक्र
―――
ड) क (ड
डर
―――
०

आतां ∵ ड, क स निःशेष भागितो, ∴ ड, क क स आणि क क + ड ह्यास म्हणजे ब स निःशेष भागितो;

∴ ड, प ब स आणि प ब + क ह्यास म्हणजे अ स निःशेष भागितो.

ह्यावरून हें उघड आहे कीं, शेवटला भाज्य ड, अ स आणि ब स निःशेष भागितो म्हणून ड हा त्यांचा दृढ भाजक आहे.

कारण ड' हा त्याचा दृढभाजक आहे असें मान तर,

∵ तो अस आणि बस निःशेष भागितो, ∴ तो अ आणि पब; आणि (अ - पब) म्हणजे क ह्यांस ही प्रत्येकीं निःशेष भागितो.

∴ तो ककस आणि ब - क कस म्हणजे डस निःशेष भागितो.

म्हणून अ आणि ब ह्यांचा जो दृढभाजक ड' हा डस निःशेष भागितो;

आणि ∵ ड हा अ आणि ब ह्यांचा साधारण भाजक आहे आणखी ∵ जो दृढभाजक डस निःशेष भागितो तो ड बरोबर असला पाहिजे.

∴ ड' = ड; म्हणून शेवटला भाज्य जो ड तोच दृढभाजक आहे.

ह्यावरून असा नियम निघतो कीं, मोठ्या संख्येस धाकट्या संख्येनें भाग आणि त्या भाजकास बाकीनें भाग, असें, बाकी शून्य राही तोंपर्यंत कर; शेवटला जो भाज्य तो दृढभाजक होईल.

हा नियम दाहाव्या कलमांतील उदाहरणांस लागू आहे.

लघुतम साधारण गुणाकार.

कोणत्याही पदांचा साधारण गुणाकार तोच होय, कीं,

ज्यास त्या पदांनीं भागिलें असतां बाकी राहात नाहीं, आणि त्यांचा लघुतम साधारण गुणाकार तोच होय कीं जो साधारण गुणाकारांत अति लहान असतो.

अ आणि ब ह्या पदांचा साधारण भाजक म आहे आणि $\frac{अ}{म}$ = प, आणि $\frac{ब}{म}$ = क आहे, असें मान; तर गुणाकारानें $\frac{अब}{म}$ = पक, $\frac{अब}{म}$ = मपक = अक किंवा पब.

$\therefore$ $\frac{अब}{म}$ हा अ आणि ब ह्यांचा साधारण गुणाकार आहे.

परंतु म जेव्हां अति मोठा आहे तेव्हां $\frac{अब}{म}$ अति लहान आहे: म्हणजे,

$\frac{अब}{दृढभाजक}$ = अ आणि ब ह्यांचा लघुतम साधारण गुणाकार.

ह्यावरून असा नियम निघतो, कीं दोन पदांचा गुणाकार घेऊन त्या गुणाकारास त्यांच्या दृढभाजकानें भागावें, जो भागाकार तो त्यांचा लघुतम साधारण गुणाकार होईल.

कितीही जरी पदें असलीं तरी त्याविषयीं वरचेप्रमाणेंच सिद्ध करतां येईल.

लघुतम साधारण गुणाकार बहुतकरून अटकळीनेंही काढतां येईल.

उदा० १. $\frac{३ क्ष^३ - ३ क्ष^२य + क्षय^२ - य^३}{४ क्ष^२ - क्षय - ३ य^२}$ ह्या अपूर्ण पदाच्या अंशछेदांचा दृढभाजक काढ, आणि ह्यास अतिसंक्षेप रूप दे.

येथें ४ क्ष², ३ क्ष³ ह्यांत जात नाहींत म्हणून भागाकार करण्याच्या अगोदर अंशास ४ ह्यांनीं गुण; चार हा गुणक ए-

काय पदास म्हणजे अंशास लावल्यानें दृढभाजकास कांहीं बाध येणार नाहीं हें अगदीं स्पष्ट आहे.

$$
\begin{array}{l}
४क्ष^{२}-क्षय-३य^{२})\,१२क्ष^{३}-१२क्ष^{२}य+४क्षय^{२}-४य^{३}\,(३क्ष-९य \\
\qquad\qquad\quad \underline{१२क्ष^{३}-३क्ष^{२}य-९क्षय^{२}} \\
\qquad\qquad\qquad\quad -९क्ष^{२}य+१३क्षय^{२}-४य^{३} \quad \text{ह्यांस ४} \\
\qquad\qquad\qquad\quad -३६क्ष^{२}य+५२क्षय^{२}-१६य^{३} \quad \text{ह्यांनी गुण.} \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-३६क्ष^{२}य+९क्षय^{२}+२७य^{३}} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ४३क्षय^{२}-४३य^{३}
\end{array}
$$

ह्यांतून $४३ य^{२}$ हा गुणक काढून टाक.

$$
\begin{array}{l}
क्ष-य)\,४क्ष^{२}-क्षय-३य^{२}\,(४क्ष+३य \\
\qquad\quad \underline{४क्ष^{२}-४क्षय} \\
\qquad\qquad\quad ३क्षय-३य^{२} \\
\qquad\qquad\quad \underline{३क्षय-३य^{२}}
\end{array}
$$

$\therefore$ क्ष - य हा दृढभाजक आहे, आणि ह्यानें अपूर्णपदाच्या दोन्ही पदांस भागल्यानें,

$$\frac{३क्ष^{३}-३क्ष^{२}य+क्षय^{२}-य^{३}}{४क्ष^{२}-क्षय-३य^{२}}=\frac{३क्ष^{२}+य^{२}}{४क्ष+३य}$$ हें उत्तर.

उदा० २. असें दाखीव कीं, $\frac{क्ष^{६}+क्ष^{-२}-(क्ष^{-६}+क्ष^{२})}{क्ष^{३}+क्ष-(क्ष^{-३}+क्ष^{-१})}=\frac{क्ष^{४}+क्ष^{-४}}{क्ष+क्ष^{-१}}$

$$\frac{क्ष^{६}+क्ष^{-२}-(क्ष^{-६}+क्ष^{२})}{क्ष^{३}+क्ष-(क्ष^{-३}+क्ष^{-१})}=\frac{क्ष^{-२}(क्ष^{८}+१)-क्ष^{-६}(१+क्ष^{८})}{क्ष(क्ष^{२}+१)-क्ष^{-३}(१+क्ष^{२})}$$

$$=\frac{(क्ष^{-२}-क्ष^{-६})(१+क्ष^{८})}{(क्ष-क्ष^{-३})(१+क्ष^{२})}=\frac{क्ष^{-६}(क्ष^{४}-१)(१+क्ष^{८})}{क्ष^{-३}(क्ष^{४}-१)(१+क्ष^{२})}$$

$$=\frac{क्ष^{-४}(१+क्ष^{८})}{क्ष^{-१}(क्ष^{२}+१)}=\frac{क्ष^{४}+क्ष^{-४}}{क्ष+क्ष^{-१}}$$ हें उत्तर.

ह्या पुढील पदांचे दृढभाजक काढ.

१. $क्ष^{२} + क्ष - २$ आणि $क्ष^{३} + २ क्ष - ३$.

उत्तर. $क्ष - १$.

२. $६ अ^{२} + ११ अक्ष + ३ क्ष^{२}$ आणि $६ अ^{२} + ७ अक्ष - ३ क्ष^{२}$.

उत्तर. $२ अ + ३ क्ष$.

३. $८ अ^{२} ब^{२} - १० अ ब^{३} + २ ब^{४}$ आणि $९ अ^{४} ब - ९ अ^{३} ब^{२} + ३ अ^{२} ब^{३} - ३ अ ब^{४}$.

उत्तर. $अ ब - ब^{२}$.

४. $क्ष^{३} + २ क्ष^{२} + २ क्ष + १$ आणि $क्ष^{३} - २ क्ष - १$.

उत्तर. $क्ष + १$.

५. $२ क्ष^{२} - क्षय - ६ य^{२}$ आणि $३ क्ष^{२} - ८क्षय + ४य^{२}$.

उत्तर. $क्ष - २ य$.

६. $२ क्ष^{३} - ३ क्ष^{२} - २ क्ष + ३$ आणि $३ क्ष^{४} + २ क्ष^{३} - २ क्ष^{२} - २ क्ष - १$.

उत्तर. $क्ष^{२} - १$.

ह्या पुढील अपूर्णपदांस अतिसंक्षेपरूप दे.

७. $\dfrac{क्ष^{२} + २ अक्ष + अ^{२}}{क्ष^{२} - अ^{२}}$ आणि $\dfrac{क्ष^{२} - २ क्षय + य^{२}}{क्ष^{२} - य^{२}}$.

उत्तर. $\dfrac{क्ष + अ}{क्ष - अ}$ आणि $\dfrac{क्ष - य}{क्ष + य}$

८. $\dfrac{अ^{३} + ब^{३}}{(अ+ब)^{२}}$ आणि $\dfrac{(अ + ब)^{३}}{अ^{२} - ब^{२}}$

उत्तर. $\dfrac{अ^{२} - अब + ब^{२}}{अ + ब}$ आणि $\dfrac{(अ + ब)^{२}}{अ - ब}$.

९. $\dfrac{क्ष^{२} + क्ष - २}{२क्ष^{३} - ३क्ष + १}$ आणि $\dfrac{क्ष^{३म} + क्ष^{२म} - २}{क्ष^{२म} + क्ष^{म} - २}$

उत्तर. $\dfrac{क्ष + २}{२ क्ष - १}$ आणि $\dfrac{क्ष^{२म} + २ क्ष^{म} + २}{क्ष^{म} + २}$

१०. $\frac{\text{क्ष}^३ - \text{क्ष}^२\text{य} - \text{क्षय}^२ + \text{य}^३}{\text{क्ष}^४ - \text{य}^४}$ आणि $\frac{३\text{क्ष}^२ - २२\text{क्ष} - १५}{५\text{क्ष}^४ - १७\text{क्ष}^३ + १८\text{क्ष}^२}$.

उत्तर. $\frac{\text{क्ष} - \text{य}}{\text{क्ष}^२ + \text{य}^२}$, आणि $\frac{३\text{क्ष}^२ + ९\text{क्ष} + ५}{५\text{क्ष}^३ - २\text{क्ष}^२ - ६\text{क्ष}}$.

बीजांतील अपूर्णपदांची बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, आणि भागाकार.

उदाहरणें.

१. $\frac{२\text{क्ष} - ५}{३}$ आणि $\frac{\text{क्ष} - १}{२\text{क्ष}}$ ह्यांची बेरीज कर.

येथें छेदांचा लघुतम साधारण गुणाकार ६ क्ष आहे, आणि पहिल्या अपूर्णपदाच्या दोन्ही पदांस २ क्ष ह्यांनीं आणि दुसऱ्याच्या दोन्ही पदांस ३ ह्यांनीं गुणलें म्हणजे दोनही अपूर्णपदें समच्छेद होतील; म्हणजे,

$$\left.\begin{array}{l} \frac{२\text{क्ष}-५}{३} \times \frac{२\text{क्ष}}{२\text{क्ष}} = \frac{४\text{क्ष}^२ - १०\text{क्ष}}{६\text{क्ष}} \\ \frac{\text{क्ष} - १}{२\text{क्ष}} \times \frac{३}{३} = \frac{३\text{क्ष} - ३}{६\text{क्ष}} \end{array}\right\} \therefore \frac{४\text{क्ष}^२ - ७\text{क्ष} - ३}{६\text{क्ष}} \text{ हीबेरीज.}$$

२. $\frac{\text{अ}}{२} - \frac{\text{ब}}{३} + \frac{\text{क}}{५}$, $\frac{\text{अ}}{४} - \frac{\text{ब}}{५} - \frac{\text{क}}{३}$, आणि $\frac{\text{अ}}{३} + \frac{\text{ब}}{४} + \frac{\text{क}}{२}$ ह्या अपूर्णपदांची बेरीज कर.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\text{अ}}{२} - \frac{\text{ब}}{३} + \frac{\text{क}}{५} = \frac{६\text{अ}}{१२} - \frac{२०\text{ब}}{६०} + \frac{६\text{क}}{३०} \\ \frac{\text{अ}}{४} - \frac{\text{ब}}{५} - \frac{\text{क}}{३} = \frac{३\text{अ}}{१२} - \frac{१२\text{ब}}{६०} - \frac{१०\text{क}}{३०} \\ \frac{\text{अ}}{३} + \frac{\text{ब}}{४} + \frac{\text{क}}{२} = \frac{४\text{अ}}{१२} + \frac{१५\text{ब}}{६०} + \frac{१५\text{क}}{३०} \end{array}\right\} \therefore \frac{१३\text{अ}}{१२} - \frac{१७\text{ब}}{६०} + \frac{११\text{क}}{३०} \text{ ही बेरीज.}$$

३. $\frac{५ क्ष^२}{२} - \frac{७ य^२}{३}$, $-\frac{४ क्ष^२}{३} + \frac{५ य^२}{२}$, आणि $\frac{७ क्ष^२}{४}$ $-\frac{३ य^२}{२}$ ह्या अपूर्णपदांची बेरीज घे.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{५क्ष^२}{२} - \frac{७य^२}{३} = \frac{३०क्ष}{१२} - \frac{१४य^२}{६} \\ -\frac{४क्ष^२}{३} + \frac{५य^२}{२} = \frac{-१६क्ष^२}{१२} + \frac{१५य^२}{६} \\ \frac{७क्ष^२}{४} - \frac{३य^२}{२} = \frac{२१क्ष^२}{१२} - \frac{९य^२}{६} \end{array}\right\} \therefore \frac{३५क्ष^२}{१२} - \frac{८य^२}{६} = २\tfrac{११}{१२}क्ष^२ - १\tfrac{१}{३}य^२ = \text{बेरीज.}$$

४. $\frac{३}{४(१-क्ष)^२} + \frac{३}{८(१-क्ष)} + \frac{१}{८(१-क्ष)} - \frac{१-क्ष}{४(१+क्ष)^२}$ ह्याचें एक अपूर्णपद कर.

दुसरें आणि तिसरें अपूर्णपद घे आणि तीं समच्छेद करून मांड.

$$\frac{३}{८(१-क्ष)} \times \frac{१+क्ष}{१+क्ष} = \frac{३+३क्ष}{८(१-क्ष^२)}$$

$$\frac{१}{८(१+क्ष)} \times \frac{१-क्ष}{१-क्ष} = \frac{१-क्ष}{८(१-क्ष^२)}$$

ह्यांची बेरीज घेतल्यानें, $\frac{४+२क्ष}{८(१-क्ष^२)} = \frac{२+क्ष}{४(१-क्ष^२)}$

हें पद आणि चवथें अपूर्ण पद घेऊन तीं समच्छेद कर.

$$\frac{२+क्ष}{४(१-क्ष^२)} \times \frac{१+क्ष^२}{१+क्ष^२} = \frac{क्ष^३+२क्ष^२+क्ष+२}{४(१-क्ष^४)}$$

$$\frac{१-क्ष}{४(१+क्ष^२)} \times \frac{१-क्ष^२}{१-क्ष^२} = \frac{१-क्ष-क्ष^२+क्ष^३}{४(१-क्ष^४)}$$

ह्यांची वजाबाकी घेतल्यानें, $\frac{३\text{क्ष}^{२} + २\text{क्ष} + १}{४(१ - \text{क्ष}^{४})}$

हें पद आणि पहिलें अपूर्णपद घे आणि ह्याच छेदाचा लघुतम साधारण गुणाकार काढून हीं समच्छेद कर.

$$४(१-\text{क्ष})\ ४(१-\text{क्ष})^{२},\ ४(१-\text{क्ष}^{२}).(१+\text{क्ष}^{२})$$

$$\overline{(१-\text{क्ष})(१+\text{क्ष})(१+\text{क्ष}^{२})}=४(१-\text{क्ष})(१-\text{क्ष}^{४}$$

$$= \text{ल॰ सा॰ गु॰}$$

$$\frac{३}{४(१-\text{क्ष})^{२}} \times \frac{१+\text{क्ष}+\text{क्ष}^{२}+\text{क्ष}^{३}}{१+\text{क्ष}+\text{क्ष}^{२}+\text{क्ष}^{३}} = \frac{३+३\text{क्ष}+३\text{क्ष}^{२}+३\text{क्ष}^{३}}{४(१-\text{क्ष})(१-\text{क्ष}^{४})}$$

$$\frac{१+२\text{क्ष}+३\text{क्ष}^{२}}{४(१-\text{क्ष}^{४})} \times \frac{१-\text{क्ष}}{१-\text{क्ष}} = \frac{१+\text{क्ष}+\text{क्ष}^{२}-३\text{क्ष}^{३}}{४(१-\text{क्ष})(१-\text{क्ष}^{४})}$$

ह्यांची बेरीज घेतल्यानें, $\frac{४+४\text{क्ष}+४\text{क्ष}^{२}}{४(१-\text{क्ष})(१-\text{क्ष}^{४})} = \frac{१+\text{क्ष}+\text{क्ष}^{२}}{१-\text{क्ष}-\text{क्ष}^{४}+\text{क्ष}^{५}}$

५. अ + ब आणि $\frac{\text{अ}}{२} - \frac{\text{ब}}{२}$ ह्यांची वजाबाकी कर.

$$\text{अ} + \text{ब} = \frac{२\text{अ}}{२} + \frac{२\text{ब}}{२}$$

$$\frac{\text{अ}}{२} - \frac{\text{ब}}{२}$$

$$\frac{\text{अ}}{२} + \frac{३\text{ब}}{२} = \text{बाकी.}$$

६. $\frac{\text{अ}}{३} + \frac{\text{ब}}{२} - \frac{\text{क}}{४}$ आणि $\frac{\text{अ}+\text{ब}}{४} - \frac{\text{क}}{८}$ ह्यांची वजाबाकी कर.

$$\frac{\text{अ}}{३} + \frac{\text{ब}}{२} - \frac{\text{क}}{४} = \frac{४\text{अ.}}{१२} + \frac{६\text{ब}}{१२} - \frac{२\text{क}}{८}$$

$$\frac{\text{अ} + \text{ब}}{\text{४}} - \frac{\text{क}}{\text{८}} = \frac{\text{३ अ}}{\text{१२}} + \frac{\text{३ ब}}{\text{१२}} - \frac{\text{क}}{\text{८}}$$

$$\frac{\text{अ}}{\text{१२}} + \frac{\text{३ब}}{\text{१२}} - \frac{\text{क}}{\text{८}} = \frac{\text{अ}+\text{३ब}}{\text{१२}} - \frac{\text{क}}{\text{८}}$$

७. $\frac{\text{क्ष}}{\text{क्ष}-\text{२}}$ आणि $\frac{\text{क्ष}}{\text{क्ष}-\text{३}}$ ह्यांची बेरीज आणि वजाबाकी कर.

$$\frac{\text{क्ष}}{\text{क्ष}-\text{२}} \times \frac{\text{क्ष} - \text{३}}{\text{क्ष} - \text{३}} = \frac{\text{क्ष}^{\text{२}} - \text{३ क्ष}}{\text{क्ष}^{\text{२}} - \text{५ क्ष} + \text{६}}$$

$$\frac{\text{क्ष}}{\text{क्ष}-\text{३}} \times \frac{\text{क्ष} - \text{२}}{\text{क्ष} - \text{२}} = \frac{\text{क्ष}^{\text{२}} - \text{२ क्ष}}{\text{क्ष}^{\text{२}} - \text{५ क्ष} + \text{६}}$$

ह्यांचे बेरजेनें, $\frac{\text{२क्ष}^{\text{२}} - \text{५ क्ष}}{\text{क्ष}^{\text{२}} - \text{५ क्ष} + \text{६}}$, वजाबाकीनें, $\frac{- \text{क्ष}}{\text{क्ष}^{\text{२}} - \text{५ क्ष} + \text{६}}$

८. $\frac{\text{४क्ष}^{\text{२}}-\text{१}}{\text{८}}$ ह्यांस $\frac{\text{२क्ष}+\text{१}}{\text{२क्ष}-\text{१}}$ ह्यांनीं; आणि $\frac{\text{२ अ}^{\text{२}}}{\text{अ}^{\text{२}} - \text{ब}^{\text{२}}}$ ह्यांस $\frac{(\text{अ} + \text{ब})^{\text{२}}}{\text{४ ब}^{\text{२}}\text{अ}^{\text{२}}}$ ह्यांनीं गुण.

$$\frac{\text{४क्ष}^{\text{२}}-\text{१}}{\text{८}} \times \frac{\text{२क्ष}+\text{१}}{\text{२क्ष}-\text{१}} = \frac{(\text{२क्ष}+\text{१})\ (\text{२क्ष}-\text{१})}{\text{८}} \times \frac{\text{२क्ष}+\text{१}}{\text{२क्ष}-\text{१}}$$

$$\frac{(\text{२ क्ष} + \text{१})\ (\text{२ क्ष} + \text{१})}{\text{८}} = \frac{\text{४ क्ष}^{\text{२}} + \text{४ क्ष} + \text{१}}{\text{८}}.$$

$$\frac{\text{२अ}^{\text{२}}}{\text{अ}^{\text{२}}-\text{ब}^{\text{२}}} \times \frac{(\text{अ}+\text{ब})^{\text{२}}}{\text{४अ}^{\text{२}}\text{ब}^{\text{२}}} = \frac{\text{२अ}^{\text{२}}}{(\text{अ}+\text{ब})(\text{अ}-\text{ब})} \times \frac{(\text{अ}+\text{ब})(\text{अ}+\text{ब})}{\text{२अ}^{\text{२}}\times\text{२ब}^{\text{२}}}$$

$$= \frac{\text{अ} + \text{ब}}{\text{२ ब}^{\text{२}}(\text{अ} - \text{ब})}.$$

९. $\frac{\text{अ} + \text{१}}{\text{ब}}$ ह्यांस $\frac{\text{१} + \overline{\text{अ}}^{\text{१}}}{\text{ब}}$ ह्यांनीं; आणि $\left(\frac{\text{१}}{\text{अ}} + \frac{\text{१}}{\text{ब}}\right)$ ह्यांस $\left(\frac{\text{१}}{\text{अ}} - \frac{\text{१}}{\text{ब}}\right)$ ह्यांनीं भाग.

$$\frac{\text{अ}+\text{१}}{\text{ब}} \div \frac{\text{१}+\text{अ}^{\text{१}}}{\text{ब}} = \frac{\text{अ}+\text{१}}{\text{ब}} \div \frac{{*}\text{अ}+\text{१}}{\text{बअ}} = \frac{\text{अ}+\text{१}}{\text{ब}} \times \frac{\text{बअ}}{\text{अ}+\text{१}} = \text{अ}.$$

$$\left(\frac{\text{१}}{\text{अ}} + \frac{\text{१}}{\text{ब}}\right) \div \left(\frac{\text{अ}}{\text{१}} - \frac{\text{१}}{\text{ब}}\right) = \frac{\text{ब}+\text{अ}}{\text{अ ब}} \div \frac{\text{ब}-\text{अ}}{\text{अब}}$$

$$= \frac{\text{ब}+\text{अ}}{\text{अब}} \times \frac{\text{अब}}{\text{ब}-\text{अ}} = \frac{\text{अ}+\text{ब}}{\text{ब}-\text{अ}}.$$

१०. $\dfrac{\text{क्ष}^{\text{२}} - (\text{अ}+\text{ब})\text{क्ष}+\text{अब}}{\text{क्ष}^{\text{२}} - (\text{अ}-\text{ब})\text{क्ष}-\text{अब}}$ ह्यांस $\dfrac{\text{क्ष}+\text{ब}}{\text{क्ष}-\text{ब}}$ ह्यांनीं गूण.

$$\frac{\text{क्ष}^{\text{२}} - (\text{अ}+\text{ब})\text{क्ष}+\text{अब}}{\text{क्ष}^{\text{२}} - (\text{अ}-\text{ब})\text{क्ष}-\text{अब}} = \frac{\text{क्ष}^{\text{२}} - \text{बक्ष} - \text{अक्ष} + \text{अब}}{\text{क्ष}^{\text{२}} + \text{बक्ष} - \text{अक्ष} - \text{अब}}$$

$$= \frac{\text{क्ष}(\text{क्ष}-\text{ब})-\text{अ}(\text{क्ष}-\text{ब})}{\text{क्ष}(\text{क्ष}+\text{ब})-\text{अ}(\text{क्ष}+\text{ब})} = \frac{(\text{क्ष}-\text{अ})(\text{क्ष}-\text{ब})}{(\text{क्ष}-\text{अ})(\text{क्ष}+\text{ब})} = \frac{\text{क्ष}-\text{ब}}{\text{क्ष}+\text{ब}},$$

आणि $\dfrac{\text{क्ष} - \text{ब}}{\text{क्ष} + \text{ब}} \times \dfrac{\text{क्ष} + \text{ब}}{\text{क्ष} - \text{ब}} = \text{१}.$

११. $\dfrac{\text{अ}^{\text{म}}}{(\text{अ}+\text{ब})^{\text{न}}} + \dfrac{\text{अ}^{\text{म}-\text{२}}\text{ब}^{\text{२}}}{(\text{अ}+\text{ब})^{\text{न}-\text{१}}} - \dfrac{\text{अ}^{\text{म}-\text{३}}\text{ब}^{\text{२}}}{(\text{अ}+\text{ब})^{\text{न}-\text{२}}}$ ह्यांचें एक अपूर्णपद कर.

येथें $(\text{अ} + \text{ब})^{\text{न}}$ हा छेदांचा लघुतम साधारण गुणाकार आहे म्हणून दुसरें आणि तिसरें अपूर्णपद घे, आणि त्यांस हा छेद आण; म्हणजे,

$$\frac{\text{अ}^{\text{म}-\text{२}}\text{ब}^{\text{२}}}{\text{अ}(+\text{ब})^{\text{न}-\text{१}}} \times \frac{\text{अ} + \text{ब}}{\text{अ} + \text{ब}} = \frac{\text{अ}^{\text{म}-\text{१}}\text{ब}^{\text{२}} + \text{अ}^{\text{म}-\text{२}}\text{ब}^{\text{३}}}{(\text{अ}+\text{ब})^{\text{न}}}$$

$$\frac{\text{अ}^{\text{म}-\text{३}}\text{ब}^{\text{२}}}{(\text{अ}+\text{ब})^{\text{न}-\text{२}}} \times \frac{(\text{अ}+\text{ब})^{\text{२}}}{(\text{अ}+\text{ब})^{\text{२}}} = \frac{\text{अ}^{\text{म}-\text{१}}\text{ब}^{\text{२}}+\text{२}\text{अ}^{\text{म}-\text{२}}\text{ब}^{\text{३}}+\text{अ}^{\text{म}-\text{३}}\text{ब}^{\text{४}}}{(\text{अ}+\text{ब})^{\text{न}}}$$

---

* भाज्यपदांच्या दोहींपदास अनें गुणून हें पद आलें आहे.

ह्यांची वजाबाकी केल्यानें, $\frac{-अ^{म-२}ब^{३} - अ^{म-३}ब^{४}}{(अ+ब)^{न}}$.

आणि ह्यांत पहिलें अपूर्णपद मिळवल्यानें,

$$\frac{अ^{म} - (अ^{म-२} + अ^{म-३}ब)ब^{३}}{(अ+ब)^{न}}.$$

अपूर्णपदांच्या बेरजेचीं उदाहरणें.

१. $\frac{क्ष}{२}, \frac{२ क्ष}{३}$, आणि $\frac{३ क्ष}{४}$ ह्यांची बेरीज कर.

उत्तर. $\frac{२३ क्ष}{१२} = क्ष + \frac{११}{१२} क्ष$.

२. $\frac{२ क्ष}{५} + \frac{३ क्ष}{२} + \frac{७ क्ष}{१०}$; आणि $\frac{क्ष}{अ+क्ष} + \frac{अ}{अ-क्ष}$.

उत्तर. $\frac{१३ क्ष}{५}$; आणि $\frac{अ^{२} + २ अक्ष - क्ष^{२}}{अ^{२} - क्ष^{२}}$

३. $\frac{३ अ^{२}}{२ ब} + \frac{२ अ}{५} + \frac{३ ब}{७ अ}$; आणि $\frac{क्ष}{क्ष+३} + \frac{क्ष}{क्ष-३}$.

उत्तर. $\frac{१०५अ^{३}+२८अ^{२}ब+३०ब^{२}}{७०अब}$; आणि $\frac{२ क्ष^{२}}{क्ष^{२}-९}$.

४. $\frac{अ+ब}{अ-ब} + \frac{अ-ब}{अ+ब}$, आणि $\frac{२ क्ष}{१-क्ष^{२}} + \frac{१}{क्ष+१}$.

उत्तर. $\frac{२(अ^{२} + ब^{२})}{अ^{२}-ब^{२}}$; आणि $\frac{१}{१-क्ष}$.

५. $\frac{अ^२ + अब + ब^२}{अ + ब} + \frac{ब^२}{अ - ब}$; आणि $\frac{क्ष - १}{क्ष^२ + क्ष + १}$, $+ \frac{१}{क्ष - १}$.

उत्तर. $\frac{अ(अ^२ + ब^२)}{अ^२ - ब^२}$; आणि $\frac{२क्ष^२ - क्ष + २}{क्ष^३ - १}$.

६. $\frac{क्ष}{क्ष^२ - य^२} + \frac{य}{क्ष + य} + \frac{१}{क्ष - य}$ आणि $\frac{अ}{१ - अ} + \frac{अ}{१ + अ} + \frac{१}{१ + अ}$.

उत्तर. $\frac{२क्ष + क्षय - य^२ + य}{क्ष^२ - य^२}$; आणि $\frac{१}{१ - अ}$

अपूर्णपदांच्या वजाबाकीचीं उदाहरणें.

१. $\frac{५अ}{२}$ ह्यांतून $\frac{अ}{३}$ हें; आणि $\frac{३(क्ष + य)}{४}$ ह्यांतून $\frac{क्ष - य}{८}$ हें वजाकर.

उत्तर. $\frac{१३}{६}$ अ; आणि $\frac{५क्ष + ७य}{८}$

२. $\frac{५य + २}{७} - \frac{२य + १}{३}$; आणि $\frac{५क्ष - ३}{क्ष + १} - \frac{३क्ष + २}{क्ष - १}$.

उत्तर. $\frac{य - १}{२१}$; आणि $\frac{२क्ष^२ - १३क्ष + १}{क्ष^२ - १}$.

३. $\frac{अ + २ब}{अ - २ब} - \frac{अ - २ब}{अ + २ब}$; आणि $\frac{१}{क्ष - य} - \frac{१}{क्ष + य}$.

उत्तर. $\frac{८अब}{अ^२ - ४ब^२}$; आणि $\frac{२य}{क्ष^२ - य^२}$.

४. $\frac{१}{य - ज्ञ} - \frac{१}{य^२ - ज्ञ^२}$; आणि $\frac{२क्ष^२ - २क्ष + १}{क्ष - क्ष} - \frac{क्ष}{क्ष - १}$

उत्तर. $\frac{य+ज्ञ-१}{य^२-ज्ञ^२}$; आणि $१-\frac{१}{क्ष}$.

५. $\frac{क्ष^२-क्ष+१}{क्ष-१}-\frac{२}{क्ष+१}$; आणि $\frac{अ}{(१-अ)^२}+\frac{१}{१-अ}-\frac{अ^२}{(१-अ)^३}$

उत्तर. $\frac{क्ष^३-२क्ष+३}{क्ष^२-१}$; आणि $\frac{१-अ-अ^२}{(१-अ)^३}$.

६. $\frac{क्ष^२+य^२}{क्ष^२-य^२}+\frac{क्ष}{क्ष+य}-\frac{य}{क्ष-य}$; आणि $१-\frac{१}{(क्ष-य)^२}-\frac{१}{क्ष^२-य^२}$.

उत्तर. $\frac{२क्ष}{क्ष+य}$; आणि $१-\frac{२य}{(क्ष+य)(क्ष-य)^२}$

७. $\frac{१}{२}.\frac{३म+२न}{३म-२न}-\frac{१}{२}.\frac{३म-२न}{३म+२न}$; आणि $\frac{क्ष^{३न}}{क्ष^{न}-१}+\frac{१}{क्ष^{न}+१}-\frac{क्ष^{२न}}{क्ष^{म}+१}-\frac{१}{क्ष^{न}-१}$.

उत्तर. $\frac{६मन}{९म^२-४न^२}$; आणि $क्ष^{२न}+२$.

अपूर्ण पदांच्या गुणाकाराचीं उदाहरणें.

१. $\frac{३अ}{५}$ ह्यांस $\frac{अ}{४}$ ह्यांनीं; आणि $\frac{२क्ष}{३}$ ह्यांस $\frac{क्षय^२}{६}$ ह्यांनीं गूण.

उत्तर. $\frac{३अ^२}{२०}$; आणि $\frac{क्ष^२य^२}{९}$.

२. $\frac{२ क्ष}{क्ष-य} \times \frac{क्ष^{२} - य^{२}}{८}$; आणि $\frac{क्ष^{२} - १}{३} \times \frac{६ अ}{क्ष+१}$.

उत्तर. $\frac{क्ष^{२} + क्षय}{४}$; आणि २ अ(क्ष-१).

३. $\frac{अ^{२} - ब^{२}}{अ} \times \frac{१}{अ+ब} \times \frac{अ}{अ-ब}$; आणि $\frac{१५ ज्ञ - ३०}{२ ज्ञ} \times \frac{३ ज्ञ^{२}}{५ ज्ञ - १०}$.

उत्तर. १ ; आणि $\frac{९}{२}$ ज्ञ.

४. $\frac{(क्ष-१)^{२}}{य^{३}} \times \frac{(क्ष+१)य^{२}}{क्ष - १}$; आणि $(म+\frac{१}{म}-१) \times (म+\frac{१}{म}+१)$.

उत्तर. $\frac{क्ष^{२} - १}{य}$; आणि $म^{२} + १ + \frac{१}{म^{२}}$.

५. $\left(क्ष - \frac{य^{२}}{क्ष}\right) \times \left(\frac{क्ष}{य} + \frac{य}{क्ष}\right)$; आणि $\frac{४ क्ष^{४} - १}{९ क्ष^{६} - य^{२}} \times \frac{३ क्ष^{३} + य}{२ क्ष^{२} - १}$.

उत्तर. $\frac{क्ष^{४} - य^{४}}{क्ष^{२} य}$; आणि $\frac{२ क्ष^{२} + १}{३ क्ष^{३} - य}$.

६. $\left\{ \frac{अ^{४} क्ष}{अ^{२} - क्ष^{२}} - अ^{२} क्ष - क्ष^{३} \right\} \times \frac{अ + क्ष}{क्ष^{३}}$.

उत्तर. $\frac{क्ष^{२}}{अ-क्ष}$

अपूर्णपदांच्या भागाकाराचीं उदाहरणें.

१. $\frac{५ म^{२}}{न} \div \frac{१०}{३ न}$; आणि $\frac{३ क्ष^{२}}{२ क्ष-२} \div \frac{२ क्ष}{क्ष - १}$.

उत्तर. $\frac{३}{२}\text{म}^{२}$; आणि $\frac{३}{४}$.

२. $\frac{४\text{अ}+२}{३} \div \frac{२\text{अ}+१}{५\text{अ}}$; आणि $\frac{(\text{क्ष}+\text{य})^{२}}{\text{क्ष}-\text{य}} \div \frac{\text{क्ष}+\text{य}}{(\text{क्ष}-\text{य})^{२}}$

उत्तर. $\frac{१०\text{अ}}{३}$; आणि $\text{क्ष}^{२} - \text{य}^{२}$.

३. $\left(\text{क्ष} + \frac{\text{क्ष}}{\text{क्ष}-१}\right) \div \left(\text{क्ष} - \frac{\text{क्ष}}{\text{क्ष}-१}\right)$; आणि $\left(\text{क्ष}^{४} - \frac{१}{\text{क्ष}^{२}}\right) \div \left(\text{क्ष}^{२} + \frac{१}{\text{क्ष}}\right)$.

उत्तर. $\frac{\text{क्ष}}{\text{क्ष}-२}$; आणि $\text{क्ष}^{२} - \frac{१}{\text{क्ष}}$.

४. $\frac{\text{क्ष}^{३}-३\text{क्ष}^{२}\text{अ}+३\text{क्षअ}^{२}-\text{अ}^{३}}{\text{क्ष}+\text{अ}} \div \frac{\text{क्ष}-\text{अ}}{\text{क्ष}+\text{अ}}$.

उत्तर. $(\text{क्ष} - \text{अ})^{२}$

५. $\left(\frac{\text{क्ष}^{४}-\text{य}^{४}}{\text{अ}^{३}+\text{ब}^{३}}\right) \div \frac{\text{क्ष}-\text{य}}{\text{अ}^{२}-\text{अब}+\text{ब}^{२}}$.

उत्तर. $\frac{\text{क्ष}^{३}+\text{क्ष}^{२}\text{य}+\text{क्षय}^{२}+\text{य}^{३}}{\text{अ}+\text{ब}}$.

६. $\left(\text{क्ष}^{२}+२+\frac{१}{\text{क्ष}^{२}}\right) \div \frac{\text{क्ष}+\text{क्ष}^{३}}{\text{अ}}$.

उत्तर. $\frac{\text{अक्ष}^{२}+\text{अ}}{\text{क्ष}}$.

पुढील समीकरणांत क्षची किंमत काढ.

१. $३\text{क्ष}+४= \frac{५\text{क्ष}+४}{२} + ८$. दोहोंनी गुण.

$\text{६ क्ष}+\text{८}=\text{५क्ष}+\text{४}+\text{१६}$. स्थलांतर कर.

$\text{६ क्ष}-\text{५क्ष}=\text{४}+\text{१६}-\text{८}$.

$\therefore \text{क्ष} = \text{१२}$

२. $\frac{\text{३०}+\text{क्ष}}{\text{क्ष}}-\text{५}=\frac{\text{६}}{\text{क्ष}}$. क्षनीं गूण.

$\text{३०}+\text{क्ष}-\text{५क्ष}=\text{६}$. स्थलांतर कर.

$\text{क्ष}-\text{५क्ष}=\text{६}-\text{३०}$.

$-\text{४क्ष}=-\text{२४}$. $-$४ ह्यांनीं भाग.

$\therefore \text{क्ष}=\text{६}$.

३ $\frac{\text{क्ष}}{\text{२}}-\frac{{}^{*}\text{५क्ष}+\text{४}}{\text{३}}=\text{७}-\frac{{}^{*}\text{८क्ष}-\text{२}}{\text{३}}$. छेदांचा ल० सा० गु० ६ ह्यानें गूण.

$\text{३ क्ष}-\text{१० क्ष}-\text{८}=\text{४२}-\text{१६ क्ष}+\text{४}$. स्थलांतर कर.

$\text{३ क्ष}-\text{१० क्ष}+\text{१६क्ष}=\text{४२}+\text{४}+\text{८}$.

$\text{९ क्ष} = \text{५४}$.

$\therefore \text{क्ष} = \text{६}$.

४. $\frac{\text{२}}{\text{क्ष}+\text{१}}+\frac{\text{५}}{\text{२क्ष}+\text{२}}+\frac{\text{६ क्ष}-\text{६}}{\text{क्ष}^{\text{२}}-\text{१}}=\text{२}\frac{\text{५}}{\text{८}}$

येथें $\frac{\text{६क्ष}-\text{६}}{\text{क्ष}^{\text{२}}-\text{१}}=\frac{\text{६}(\text{क्ष}-\text{१})}{(\text{क्ष}-\text{१})(\text{क्ष}+\text{१})}$, ह्यास्तव वरील समीकरण असें होतें.

$\frac{\text{२}}{\text{क्ष}+\text{१}}+\frac{\text{५}}{\text{२}(\text{क्ष}+\text{१})}+\frac{\text{६}}{\text{क्ष}+\text{१}}=\frac{\text{२१}}{\text{८}}$

$\therefore$ $\text{८}(\text{क्ष}+\text{१})$ ह्यांनीं गुणून, $\text{१६}+\text{२०}+\text{४८}=\text{२१}(\text{क्ष}+\text{१})$.

$\text{८४} = \text{२१}(\text{क्ष}+\text{१})$.

$\text{४} = \text{क्ष}+\text{१}$.

$\therefore \text{३} = \text{क्ष}$.

---

* ह्या अपूर्णपदांच्या पूर्वीं ऋण चिन्ह आहे म्हणून त्यांच्या अंशांचें चिन्ह बदललें पाहिजे; कारण तें चिन्ह असें दर्शवितें कीं, त्यांचे पाठीमागें जें पद आहे त्यांतून प्रत्येक पद वजा करावयाचें आहे.

५. $$\frac{\text{अक्ष}+\text{ब}}{\text{क}}+\frac{\text{अक्ष}+\text{ब}}{\text{कक्ष}+\text{ब}}=\frac{\text{२अक्ष}+\text{ड}}{\text{२ क}}+\frac{\text{ब}}{\text{क}}$$

२ क ह्यांनीं गूण.

$$\text{२ अक्ष}+\text{२ ब}+\frac{\text{२ अकक्ष}+\text{२कब}}{\text{कक्ष}+\text{ब}}=\text{२ अक्ष}+\text{ड}+\text{२ब}.$$

∵ २ अक्ष आणि २ ब हे समीकरणाचे प्रत्येक बाजूस असून त्यांचीं चिन्हें सरूप आहेत, ∴ ते गाळतां येतील; आणि ∴ वरील समीकरण असें होतें.

$$\frac{\text{२ अकक्ष}+\text{२बक}}{\text{कक्ष}+\text{ब}}=\text{ड}.$$ (कक्ष+ब) ह्यांनीं गूण.

२ अकक्ष+२कब=कडक्ष+डब. स्थलांतर कर.

२ अकक्ष−कडक्ष=डब−२कब.

(२अक−डक)क्ष=डब−२क.ब.

$$\therefore \text{क्ष}=\frac{\text{डब}-\text{२कब}}{\text{२अक}-\text{डक}}.$$

६. $$\frac{\text{७ क्ष}+\frac{\text{१३}}{\text{२}}}{\text{१०}}+\frac{\text{११ क्ष}-\frac{\text{क्ष}-\frac{\text{३}}{\text{२}}}{\text{२}}}{\text{१२}}=\frac{\text{३क्ष}+\text{१}}{\text{५}}+\frac{\text{४३क्ष}-\frac{\text{३}-\text{८क्ष}}{\text{२}}}{\text{२२}}$$

येथें $$\frac{\text{७क्ष}+\frac{\text{१३}}{\text{२}}}{\text{१०}}=\frac{\text{१४ क्ष}+\text{१३}}{\text{२०}}.$$

$$\frac{\text{११क्ष}-\frac{\text{क्ष}-\frac{\text{३}}{\text{२}}}{\text{२}}}{\text{१२}}=\frac{\text{११ क्ष}-\frac{\text{२क्ष}-\text{३}}{\text{४}}}{\text{१२}}=\frac{\text{४४क्ष}-\text{२क्ष}+\text{२}}{\text{४८}}$$

$$=\frac{\text{४२ क्ष}+\text{३}}{\text{४८}}=\frac{\text{१४ क्ष}+\text{१}}{\text{१६}}.$$

$$\frac{\text{४३क्ष} - \frac{\text{३ ८क्ष}}{\text{२}}}{\text{२२}} = \frac{\text{८६ क्ष} - \text{३} + \text{८ क्ष}}{\text{४४}} = \frac{\text{९४ क्ष} - \text{३}}{\text{४४}}.$$

म्हणून वरील समीकरण असें होतें,

$$\frac{\text{१४ क्ष}+\text{१३}}{\text{२०}} + \frac{\text{१४क्ष}+\text{१}}{\text{१६}} = \frac{\text{३क्ष}+\text{१}}{\text{५}} + \frac{\text{९४क्ष}-\text{३}}{\text{४४}}.$$

छेदांचा लघू० सा० गु० ८८०, ह्यानें गूण.

$$\text{६१६क्ष}+\text{५७२}+\text{७७०क्ष}+\text{५५}=\text{५२८क्ष}+\text{१७६}+\text{१८८०क्ष}-\text{६०}$$

$$\text{१३८६ क्ष} - \text{२४०८ क्ष} = \text{११६} - \text{६२७}$$

$$- \text{१०२२ क्ष} = - \text{५११}$$

$$\therefore \text{क्ष} = \frac{-\text{५११}}{-\text{१०२२}} = \frac{\text{१}}{\text{२}}.$$

प्रश्न.

१. १०० ह्या संख्येचे असे दोन भाग कर, कीं जर एके भागास १५ ह्यांनीं भागिलें आणि दुसऱ्यास ५ ह्यांनीं भागिलें तर त्यांच्या भागाकारांची बेरीज १० होईल.

एक भाग दाखवायास क्ष घे, तर १०० − क्ष हा दुसरा भाग होईल.

आतां $\frac{\text{क्ष}}{\text{१५}}$ आणि $\frac{\text{१००} - \text{क्ष}}{\text{५}}$ हे दोन भागाकार आहेत.

म्हणून प्रश्नाप्रमाणें, $\frac{\text{क्ष}}{\text{१५}} + \frac{\text{१००} - \text{क्ष}}{\text{५}} = \text{१०};$

$$\text{क्ष} + \text{३००} - \text{३ क्ष} = \text{१५०}$$

$$- \text{२क्ष} = \text{१५०} - \text{३००} = - \text{१५०}$$

$$\therefore \text{क्ष} = \text{७५} = \text{एक भाग}.$$

आणि $\therefore$ १००−क्ष = १००−७५ = २५ = दुसरा भाग.

अथवा प्रकारांतरानें; दोन भाग दाखविण्यास क्ष आणि य हीं दोन अव्यक्त अक्षरें घे.

तर $क्ष + य = १०० \cdots (१)$

आणि $\frac{क्ष}{१५} + \frac{य}{५} = १० \cdots (२)$ १५ ह्यांनीं गूण.

$$\left.\begin{array}{l} क्ष + ३\,य = १५० \\ (१)\,क्ष + \,य = १०० \end{array}\right\}$$ वजाबाकी कर.

$२\,य = ५० \therefore य = २५$ = एक भाग,

$(१)\,क्ष = १०० - य = १०० - २५ = ७५$ = दुसरा भाग.

२. एक मनुष्य आपल्या देशांतून निघून दुसरें देशांत गेला; त्याचेपाशीं एक मोहर होती आणि त्यास अशी इच्छा झाली कीं, त्या नव्या देशांत जीं दोन प्रकारचीं नाणीं आहेत, तीं पंचवीस घेऊन आपली मोहर देऊन टाकावी; आणि तो चौकशी करून पाहातो तों एका प्रकारचें नाणें घेतलें तर एके मोहरेस ३० येतें आणि दुसऱ्या प्रकारचें घेतलें तर १५ येतें; तर एक एक प्रकारचें नाणें त्यानें किती किती घ्यावें ?

एक प्रकारचें नाणें दाखवायास क्ष घे, आणि दुसरे प्रकारचें. . . . . य. . . . . ;

तर $क्ष + य = २५ \cdots (१)$

नाणीं	नाणीं	*रु	रु.	
३० :	क्ष : :	१५ :	$\frac{क्ष}{२}$	= क्ष नाण्यांची किंमत.

$१५ : य : : १५ : य = य \cdots$

म्हणून, प्रश्नाप्रमाणें, $\frac{क्ष}{२} + य = १५$ रुपये. (२)

$$\left.\begin{array}{l} क्ष + २\,य = ३० \\ (१)\,क्ष + \,य = २५ \end{array}\right\}$$ वजाबाकी कर.

$य = ५$ = दुसरे प्रकारचें नाणें.

$(१)\,क्ष = २५ - य = २५ - ५ = २०$ = पहिलें. . . .

३. एक गृहस्थ जितका पैसा खर्च करीत असे त्याचा $\frac{१}{२}$

* १ मोहोर = १५ रुपये.

मागें टाकी. पुढें त्याचा खर्च पहिल्याप्रमाणेंच राहून मिळकत मात्र कमी झाली म्हणून पहिल्याच्या अर्धा इतका पैसा तो आतां मागें टाकूं लागला; तर कमी झालेली मिळकत आणि पहिली मिळकत ह्यांतील अंतर पहिले मिळकतीचा कितवा भाग होतें ?

तो जो पैसा मागें टाकितो = २ क्ष रुपये घे,

तर . . .. . खर्च करी = ८ क्ष .. . .

∴ २ क्ष + ८ क्ष = १० क्ष = त्याची पहिली मिळकत.

पुनः ८ क्ष हे तो खर्चीच, आणि क्ष हे मागें टाकीच;

∴ ८ क्ष + क्ष = ९ क्ष = कमी झालेली मिळकत.

∴ १० क्ष - ९ क्ष = क्ष = पहिली आणि कमी झालेली मिळकत ह्यांतील अंतर.

म्हणून $\frac{\text{क्ष}}{१०\text{क्ष}} = \frac{१}{१०}$ = उत्तर.

४. अ कितीएक मैल कांहीं वेळांत कांहीं चालीनें चालून गेला; जर तो $\frac{१}{२}$ मैल दर तासास जाजती चालता तर त्यास. पहिल्या चालीनें जितका विवक्षित ठिकाणीं जावयास वेळ लागला, त्याचा $\frac{४}{५}$ वेळ लागता; परंतु $\frac{१}{२}$ मैल कमी चालता तर त्यास विवक्षित ठिकाणीं जावयास पूर्ववेळेपेक्षां २$\frac{१}{२}$ तास जाजती वेळ लागता; तर त्यास किती लांब जावयाचें होतें व तो कोणत्या प्रमाणानें चालला ?

त्याची दर तासाची चाल = क्ष मैल घे,

आणि एकंदर अंतर = य . . . . .

तर $\frac{\text{य}}{\text{क्ष}}$ इतके तास त्यास जावयास लागले.

आतां क्ष + $\frac{१}{२} = \frac{२\text{क्ष}+१}{२}$ ही वाढलेली चाल;

∴ य ÷ $\frac{२\text{क्ष}+१}{२}$ किंवा $\frac{२\text{य}}{२\text{क्ष}+१}$ इतके तास जर तो $\frac{१}{२}$ मैल जाजती चालता तर रस्त्यावर लागते.

म्हणून, प्रश्नाप्रमाणें, $\frac{२य}{२क्ष+१} = \frac{४}{५}.\frac{य}{क्ष} \cdots (१)$

पुनः $क्ष - \frac{१}{२}$ किंवा $\frac{२क्ष-१}{२}$ ही कमी झालेली चाल,

$\therefore य \div \frac{२क्ष-१}{२}$ किंवा $\frac{२य}{२क्ष-१}$ इतके तास जर तो $\frac{१}{२}$ मैल कमी चालता तर त्यास रस्त्यावर लागते.

म्हणून, प्रश्नाप्रमाणें, $\frac{२य}{२क्ष-१} = \frac{य}{क्ष} + २\frac{१}{२} \cdots (२)$

(१) ह्यास २ य ह्यानें भागून, $\frac{१}{२क्ष+१} = \frac{२}{५क्ष}$;

$\therefore ५ क्ष = ४ क्ष + २,$

$५ क्ष - ४ क्ष = २, \therefore क्ष = २.$

ही क्ष ची किंमत (२) ह्यांत मांड.

$\frac{२ य}{४-१} = \frac{य}{२} + \frac{५}{२};$

$\frac{२ य}{३} = \frac{य}{२} + \frac{५}{२}$ ६ ह्यांनीं गूण.

$४ य = ३ य + १५;$

$४ य - ३ य = १५ \therefore य = १५.$

उत्तर. अंतर = १५ मैल; आणि दरतासाची चाल = २ मैल.

५. एक ससा आपल्या ५० उड्या कुत्र्यापुढें आहे, व जितक्या वेळांत कुत्रा ३ उड्या मारितो तितक्या वेळांत ससा ४ उड्या मारितो. परंतु कुत्र्याच्या २ उड्या सशाच्या ३ उड्यांबरोबर आहेत; तर सशास धरावयास कुत्र्यास किती उड्या माराव्या लागतील ?

ज्या उड्या कुत्र्यास माराव्या लागतील त्या = क्ष घे.

$२ : क्ष :: ३ : \frac{३ क्ष}{२}$ = निघाल्यापासून कुऱ्याच्या हातीं लागेपर्यंत ज्या ससाच्या उड्या त्या.

$३ : क्ष :: ४ : \frac{४ क्ष}{३}$ = कुत्रा निघाल्यापासून सशाच्या ज्या उड्या त्या.

$$\therefore \frac{३ क्ष}{२} - ५० = \frac{४ क्ष}{३};$$

$$९ क्ष - ३०० = ८ क्ष.$$

$$क्ष = ३००$$ हें उत्तर.

६. एक मनुष्य जुवा खेळावयास बसला असतां खेळतां खेळतां आपल्या पैशाचा $\frac{१}{४}$ हरला, आणि मग त्यानें तीन रुपये जिंकिले; नंतर त्याजवळ जें द्रव्य जमलें त्याचा $\frac{१}{३}$ तो हरला; आणि पुनः त्यानें २ रुपये जिंकिले; आणि शेवटीं त्याजवळ जो पैसा झाला त्याचा $\frac{१}{६}$ पुनः तो हरला आणि पाहतो तों जवळ १२ रुपये राहिले. तर तो खेळावयास बसला तेव्हां त्याजवळ किती रुपये होते ?

त्याजवळ मुळीं जें द्रव्य होतें तें = क्ष रुपये घे.

तर $\frac{क्ष}{४}$ त्यानें गमावला;

$क्ष - \frac{क्ष}{४} = \frac{३ क्ष}{४}$ इतकें द्रव्य त्याजवळ बाकी राहिलें;

$\therefore \frac{३ क्ष}{४} + ३ = \frac{३ क्ष + १२}{४}$ ही त्याची ३ रुपये जिंकल्यावरची जमा;

$\frac{क्ष + ४}{४}$ इतकें द्रव्य त्यानें दुसरे वेळेस गमाविलें,

$\therefore \frac{३ क्ष + १२}{४} - \frac{क्ष+४}{४} = \frac{२क्ष+८}{४} = \frac{क्ष+४}{२}$ ही त्याची बाकी,

$\frac{क्ष+४}{२} + २ = \frac{क्ष+८}{२}$ ही त्याची २ रु० जिंकिल्यावरची जमा.

$\therefore \frac{क्ष+८}{१४}$ इतकें द्रव्य त्यानें तिसरे वेळेस गमाविलें,

$$\frac{क्ष+८}{२} - \frac{क्ष+८}{१४} = \frac{७क्ष+५६}{१४} - \frac{क्ष+८}{१४} = \frac{६क्ष+४८}{१४}$$

ही त्याची शेवटची बाकी,

$\therefore$ प्रश्नाप्रमाणें, $\frac{६क्ष+८}{४} = १२,$

$$\frac{क्ष+८}{१४} = २;$$

$$क्ष+८ = २८$$

$$\therefore\ क्ष = २०\ \text{रुपये हें उत्तर.}$$

७. पायदळलोकांची एक टोळी घोडेस्वारांपुढें आपल्या ११६५ पावलांवर आहे; आतां घोड्यांच्या तीन पावलांचें अंतर पायदळांच्या चार पावलांचे अंतराबरोबर आहे, आणि जितक्या वेळांत पायदळ ५ पावलें जातात तितक्या वेळांत घोडे ४ पावलें जातात, तर पायदळास गांठीत तोंपर्यंत घोड्यांस किती पावलें चाललीं पाहिजेत ?

घोड्यांस जितकीं पावलें चाललीं पाहिजेत तीं = क्ष धर,

तर घो० पा० ३ : घो० पा० क्ष : : पा० पा० ४ : पा० पा० $\frac{४ क्ष}{३}$ = निघाल्यापासून घोडेस्वारांची गांठ पडे तोंपर्यंत जीं पायदळांचीं पावलें तीं.

घो० पा० ४ : घो० पा० क्ष : : पा० पा० ५ : पा० पा० $\frac{५ क्ष}{४}$ = घोडे-

स्वार निघाल्यापासून घोडेस्वार गांठीत तोंपर्यंत जीं पायदळा-चीं पावलें तीं.

$$\therefore \frac{४ क्ष}{३} - ११६५ = \frac{५ क्ष}{४};$$

$$१६ क्ष - १३९८० = १५ क्ष$$

$$१६ क्ष - १५ क्ष = १३९८०$$

$$\therefore क्ष = १३९८०.$$

८. एका नावाड्यास कांहींविळ खेपा केल्यावरून असें कळून आलें कीं, भरतीच्या साहाय्यानें अ पासून ब पावेतों (ज्यांचेमध्यें १८ मैल अंतर आहे) $१\frac{१}{२}$ तासांत होडी नेतां येते; आणि कांठांशीं मध्यापेक्षां पाण्याचा जोर $\frac{२}{५}$ कमी आहे म्हणून ब पासून अ कडे परत येतांना तो कांठाकांठानें जरी येतो तरी त्यास $२\frac{१}{४}$ तास लागतात. ह्यावरून भरतीच्या वेळेस मध्यभागीं जेथें पाण्याचा जोर अत्यंत तेथें एके तासांत पाणी किती लांब जातें ?

भरती असतां दर तासांत मध्यें पाणी जे मैल जातें ते=क्ष घे,

तर . . . . कांठाशीं . . . . = $\frac{३ क्ष}{५}$

आणि $\frac{१८}{१ + \frac{१}{२}} = १२$ मैल = भरतीच्या साहाय्यानें तो मध्य-भागीं होडी दर तासांत जे मैल नेतो ते;

$\therefore १२ - क्ष =$ भरती नसतां एके तासांत होडी जे मैल तो नेतो ते.

पुनः $\frac{१८}{२\frac{१}{४}} = ८ =$ आंगावरच्या भरताल कांठाकांठानें तो होडी दर तासांत जे मैल आणतो ते;

$\therefore ८ + \frac{३ क्ष}{५} =$ भरती नसतां तो दर तासांत होडी जे मैल आणतो ते.

म्हणून $१२ - क्ष = ८ + \frac{३क्ष}{५}$;

$६० - ५ क्ष = ४१ + ३ क्ष$;

$८ क्ष = २०$

$\therefore क्ष = २\frac{१}{२}$ = भरती असतां मध्यभागीं अत्यंत जोराचे ठिकाणीं पाणी दर तासांत जे मैल वाहतें ते.

समीकरणें.

१. $\frac{क्ष}{६} + \frac{२}{३} = क्ष + \frac{१}{३}$. उत्तर. क्ष = २.

२. $\frac{३ क्ष - ४}{२} = \frac{क्ष}{२} + \frac{क्ष}{४} + १$. उत्तर. क्ष = ४.

३. $५ क्ष - \frac{६ क्ष + ३}{११} = \frac{७ क्ष + १५}{२} - ३$. उत्तर. क्ष = ५.

४. $\frac{४}{क्ष} + २ = \frac{२४}{क्ष} - \frac{१}{२}$. उत्तर. क्ष = ८.

५. $\frac{क्ष}{८} - १ + \frac{क्ष}{१२} - \frac{क्ष+५}{४} = - \frac{११}{४}$. उत्तर. क्ष = १२.

६. $\frac{क्ष+अ}{ब} - \frac{क्ष}{अ} = १$. उत्तर. क्ष = -अ.

७. $\frac{ब}{अक्ष} - अ^{२} = ब^{२} - \frac{अ}{बक्ष}$. उत्तर. क्ष = $\frac{१}{अब}$.

८. $\frac{अ (ब^{२} + क्ष^{२})}{बक्ष} = अक + \frac{अ}{ब} क्ष$ उत्तर. क्ष = $\frac{ब}{क}$.

प्रश्न.

१. दाहा वर्षी मागें एका मुलाचें वय त्याच्या बापाच्या

वयाचा दशमांश होतें, परंतु तें आतां चतुर्थांश आहे. तर त्या दोघांचीं वयें काय आहेत ?

उत्तर १५ आणि ६०

२. अशी एक संख्या काढ, कीं जिच्या तिपटींतून ८वजा करून जी बाकी राहील तिचें अर्ध केल्यास तें, त्याच संख्येंतून दोन वजाकरून जी बाकी राहील तीबरोबर होईल.

उत्तर . ४ .

३. असा एक अपूर्णांक काढ , कीं त्याच्या अंशांत एक मिळविला असतां त्याची किंमत $\frac{१}{३}$ होईल; आणि छेदांतून एक वजा केला असतां त्याची किंमत $\frac{१}{४}$ होईल.

उत्तर. $\frac{२}{९}$.

४. अ, ब, आणि क ह्या तिघांमध्यें १३२ रुपये वांटून द्यावयाचे आहेत, ते असे कीं, बस अ च्या द्रव्याचे $\frac{४}{५}$ येतील, आणि कस अच्या आणि बच्या द्रव्याचे $\frac{५}{६}$ येतील; तर प्रत्येकाचा वांटा काय होईल ?

उत्तर. अ ४० रु०; ब ३२ रु०; आणि क ६० रु०.

५. अजवळ कांहीं मोहोरा होत्या, आणि त्यास वाटेनें त्याचे ब आणि क असे दोन सावकार भेटले, तेव्हां त्यानें आपल्या द्रव्याचे $\frac{३}{१०}$ बस दिले व बाकीच्या द्रव्याचे $\frac{६}{७}$ कस दिले; आणि पाहातो तों ११ मोहोरा बाकी राहिल्या; तर त्याजवळ प्रथमतः द्रव्य किती होतें ?

उत्तर. ११० मोहोरा.

६. एका मनुष्यानें आपल्या द्रव्याच्या $\frac{१}{१२}$ चें घोडे घेतले, $\frac{१}{३}$ चे बैल घेतले, आणि बाकीच्या द्रव्याच्या $\frac{३}{१०}$ चीं मेंढरें घेतलीं; आणि पाहातो तों जवळ ९८ रुपये राहिले; तर त्याजवळ प्रथमतः द्रव्य किती होतें ?

उत्तर. २४० रुपये.

प्रकरण ३.

घातकरणें.

(१२) कोणत्याही पदास विवक्षित वेळां त्याच पदानें गुणणें ह्यास त्या पदाचा घातकरणें असें म्हणतात.

जसें, $अ \times अ = अ^{१} \times अ^{१} = अ^{१+१} = अ^{२}$ = अचा दुसरा घात अथवा वर्ग.

$$अ \times अ \times अ = अ^{१} \times अ^{१} \times अ^{१} = अ^{१+१+१} =$$

$अ^{३}$ = अचा तिसरा घात अथवा घन.

$$अ \times अ \times अ \times अ \cdots\cdots \text{मसंख्येपर्यंत} =$$

$$अ^{१+१+१+१\cdots \text{नपर्यंत}} = अ^{न}.$$

पुनः, $अ^{२} \times अ^{२} \times अ^{२} = अ^{२+२+२} = अ^{२\times३} = (अ^{२})^{३} = अ^{६}$.

$$अ^{न} \times अ^{न} \times अ^{न} \cdots\cdots \text{मसंख्येपर्यंत} =$$

$$अ^{न+म+न\cdots \text{मपर्यंत.}} = अ^{न \times म} = अ^{नम}.$$

ह्यावरून कोणत्याही पदाचा कोणताही धात करण्याचा असा नियम निघतो कीं, पदाचे घातप्रकाशकास त्या पदाचा जोघात करायाचा आहे, त्या अंकानें गुणावें, गुणाकार त्या पदाचा तो विवक्षित घात येतो.

$$\sqrt{अ} \times \sqrt{अ} = अ^{\frac{१}{२}} \times अ^{\frac{१}{२}} = अ^{\frac{१}{२}+\frac{१}{२}} = अ^{१} = अ,$$

$$\sqrt[३]{अ} \times \sqrt[३]{अ} = अ^{\frac{१}{३}} \times अ^{\frac{१}{३}} = अ^{\frac{१}{३}+\frac{१}{३}} = अ^{\frac{२}{३}} = \sqrt[३]{अ^{२}},$$

$$\sqrt[४]{अ} \times \sqrt[४]{अ} \times \sqrt[४]{अ} = अ^{\frac{१}{४}+\frac{१}{४}+\frac{१}{४}} = अ^{\frac{१}{४}+\frac{१}{४}+\frac{१}{४}} = अ^{\frac{३}{४}} = \sqrt[४]{अ^{३}}.$$

$(-\text{अ})^{२} = -\text{अ} \times -\text{अ} = \text{अ}^{२}$,

$(-\text{अ})^{३} = -\text{अ} \times -\text{अ} \times -\text{अ} = -\text{अ}^{३}$,

$(-\text{अ})^{४} = -\text{अ} \times -\text{अ} \times -\text{अ} \times -\text{अ} = \text{अ}^{४}$,

इ० इ० इ०

ह्यावरून असें सिद्ध होतें, कीं ऋण पदांचा समघात धन येतो; आणि ऋणपदांचा विषम घात ऋण येतो.

$(\text{अ}+\text{ब})^{२} = (\text{अ}+\text{ब}) \times (\text{अ}+\text{ब}) = \text{अ}^{२}+२\text{अब}+\text{ब}^{२}$,

$(\text{अ}-\text{ब})^{२} = (\text{अ}-\text{ब}) \times (\text{अ}-\text{ब}) = \text{अ}^{२}-२\text{अब}+\text{ब}^{२}$,

$(\text{अ}+\text{ब})^{३} = (\text{अ}+\text{ब}) \times (\text{अ}+\text{ब}) \times (\text{अ}+\text{ब}) =$
$\text{अ}^{३} + ३\,\text{अ}^{२}\text{ब} + ३\,\text{अ}\text{ब}^{२} + \text{ब}^{३} = \text{अ}^{३}+\text{ब}^{३}+३\,\text{अब}\,(\text{अ}+\text{ब})$,

$(\text{अ}-\text{ब})^{३} = (\text{अ}-\text{ब}) \times (\text{अ}-\text{ब}) \times (\text{अ}-\text{ब}) =$
$\text{अ}^{३} - ३\,\text{अ}^{२}\text{ब} + ३\,\text{अ}\text{ब}^{२} - \text{ब}^{३} = \text{अ}^{३}-\text{ब}^{३}-३\,\text{अब}\,(\text{अ}-\text{ब})$.

ह्या शेवटल्या दोन सारण्यावरून असा नियम बांधतां येतो,कीं कोणत्याही दोन पदांच्या बेरजेचा घन,त्यांच्या घनांची बेरीज व त्यांच्या गुणाकाराच्या तिपटीस त्यांच्या बेरजेनें गुणून जो गुणाकार येतो तो, ह्यांचे बेरजे बरोबर आहे; व कोणत्या दोन पदांच्या वजाबाकीचा घन,त्यांच्या घनांच्या वजाबाकींतून, त्यांच्या गुणाकाराच्या तिपटीस त्यांचे वजाबाकीनें गुणून जो गुणाकार येतो, तो वजा करून जी बाकी राहाते, त्या बाकीबरोबर आहे.

$(\text{अ}+\text{ब}+\text{क})^{२} = \left\{(\text{अ}+\text{ब})+\text{क}\right\}^{२} = (\text{अ}+\text{ब})^{२}+२\text{क}(\text{अ}+\text{ब})+\text{क}^{२}$
$= \text{अ}^{२}+२\text{अब}+\text{ब}^{२}+२\text{अक}+२\text{बक}+\text{क}^{२}$.

$(\text{अ}+\text{ब}+\text{क}+\text{ड})^{२} = \left\{(\text{अ}+\text{ब})+(\text{क}+\text{ड})\right\}^{२} =$

$(\text{अ}+\text{ब})^{२}+२(\text{अ}+\text{ब})(\text{क}+\text{ड})+(\text{क}+\text{ड})^{२}$.

$(\text{अ}+\text{ब}-\text{क}+\text{ड})^{२} = \left\{(\text{अ}+\text{ब})-(\text{क}-\text{ड})\right\}^{२} =$

$(अ+ब)^{२}-२(अ+ब)(क-ड)+(क-ड)^{२}$.

उदाहरणें.

१. असें दाखीव कीं, $(क्ष-२अ)^{२}=क्ष^{२}-४अक्ष+४अ^{२}$.

२. .... $\left(क्ष+\frac{१}{क्ष}\right)^{२}=क्ष^{२}+२+\frac{१}{क्ष^{२}}$

३. .... $\left(क्ष+\frac{प}{२}\right)^{२}=क्ष^{२}+पक्ष+\frac{प^{२}}{४}$.

४. .... $(२क्ष-३य)^{२}=४क्ष^{२}-१२क्षय+९य^{२}$.

५. .... $(२क्ष-१)^{२}=४क्ष^{२}-४क्ष+१$.

६. .... $(अ+ब)^{४}=अ^{४}+४अ^{३}ब+६अ^{२}ब^{२}+४अब^{३}+ब^{४}$.

७. .... $(अ-क्ष)^{४}=अ^{४}-४अ^{३}क्ष+६अ^{२}क्ष^{२}-४अक्ष^{३}+क्ष^{४}$.

८. .... $(क्ष+य)^{५}=क्ष^{५}+५क्ष^{४}य+१०क्ष^{३}य^{२}+१०क्ष^{२}य^{३}$
$+५क्षय^{४}+य^{५}$.

९. .... $(स-ज्ञ)^{५}=स^{५}-५स^{४}ज्ञ+१०स^{३}ज्ञ^{२}-१०स^{२}ज्ञ^{३}$
$+५सज्ञ^{४}-ज्ञ^{५}$.

१०. .... $\left(क्ष^{\frac{१}{२}}+य^{\frac{१}{२}}\right)^{२}=क्ष+२क्ष^{\frac{१}{२}}य^{\frac{१}{२}}+य=क्ष+२\sqrt{क्षय}+य$.

११. .... $(क्ष-\sqrt{य})^{२}=क्ष^{२}-२क्ष\sqrt{य}+य$.

१२. .... $(क्ष^{२}य+\sqrt{य})^{२}=क्ष^{४}य^{२}+२क्ष^{२}य^{\frac{३}{२}}+य$.

१३. .... $\left(क्ष^{\frac{१}{३}}-य^{\frac{१}{३}}\right)^{३}=क्ष-३क्ष^{\frac{२}{३}}य^{\frac{१}{३}}+३क्ष^{\frac{१}{३}}य^{\frac{२}{३}}-य$.

१४. .... $(क्ष+१)^{४}=क्ष^{४}+४क्ष^{३}+६क्ष^{२}+४क्ष+१$.

१५. .... $\left\{(अ+ब)^{\frac{१}{३}}-(अ-ब)^{\frac{१}{३}}\right\}^{३}=२ब\ ३(अ+ब)^{\frac{१}{३}}$
$\times(अ-ब)^{\frac{१}{३}}\left\{(अ+ब)^{\frac{१}{३}}-(अ-ब)^{\frac{१}{३}}\right\}$.

मूळकाढणें.

(१३) कोणत्याही एकाद्या पदास ज्या दुसऱ्या पदानें विवक्षित वेळां भागून भाग बरोबर तुटतो त्या दुसऱ्या पदास पहिल्या पदाचें मूळ म्हणतात.

अचा वर्ग $\text{अ}^{२}$ आहे म्हणून $\text{अ}^{२}$चें वर्गमूळ अ आहे.

अचा घन $\text{अ}^{३}$ आहे म्हणून $\text{अ}^{३}$चें घनमूळ अ आहे.

अचें वर्गमूळ $\sqrt{\text{अ}}$ अथवा $\text{अ}^{\frac{१}{२}}$ आहे; $\because \sqrt{\text{अ}} \times \sqrt{\text{अ}} = \text{अ}$, आणि $\text{अ}^{\frac{१}{२}} \times \text{अ}^{\frac{१}{२}} = \text{अ}^{१} = \text{अ}$.

अचें घनमूळ $\sqrt[३]{\text{अ}}$ अथवा $\text{अ}^{\frac{१}{३}}$ आहे.

अचें नमूळ $\sqrt[न]{\text{अ}}$ अथवा $\text{अ}^{\frac{१}{न}}$ आहे.

$\text{अ}^{२}$चें घनमूळ $\sqrt[३]{\text{अ}^{२}}$ अथवा $\text{अ}^{\frac{२}{३}}$ आहे.

$\text{अ}^{न}$चें ममूळ $\sqrt[म]{\text{अ}^{न}}$ अथवा $\text{अ}^{\frac{न}{म}}$ आहे.

ह्यावरून कोणत्याही एकाकी पदाचें मूळकाढण्याचा असा नियम निघतो कीं, पदाच्या घात प्रकाशकास जितकें मूळ काढावयाचें आहे त्या अंकानें भागावें, भागाकार विवक्षित मूळ येतें.

$\because +\text{अ} \times +\text{अ} = +\text{अ}^{२}$, आणि $-\text{अ} \times -\text{अ} = +\text{अ}^{२}$,

$\therefore \sqrt{\text{अ}^{२}} = +\text{अ}$, किंवा $-\text{अ}$.

ह्यावरून असें दिसतें कीं, कोणत्याही एकाकी धन पदाचें वर्गमूळ धन किंवा ऋण आहे. परंतु जर तें धन पद ऋण पदाचा वर्ग आहे असें माहित आहे तर त्याचें वर्गमूळ ऋण धरावें.

$\because +\text{अ} \times +\text{अ} \times +\text{अ} = +\text{अ}^{३}$, आणि $-\text{अ} \times \text{अ} \times -\text{अ} = -\text{अ}^{३}$,

$\therefore \sqrt[३]{\text{अ}^{३}} = +\text{अ}$, आणि $\sqrt[३]{-\text{अ}^{३}} = -\text{अ}$.

ह्यावरून असें दिसतें कीं, कोणत्याही एकाकी धनपदाचें

घनमूळ धन आणि ऋणपदाचें घनमूळ ऋण आहे.

∵ असें कोणतेंही पद नाहीं कीं, ज्यास ज्यानें गुणिलें असतां गुणाकार $-$ अ येईल, ∴ $-$ अचें वर्गमूळ निघावयाचें नाहीं.

$अ^2 + २ अब + ब^2$ हा (अ + ब) चा वर्ग आहे म्हणून ह्याचे योगानें द्विपदाचें वर्गमूळ काढण्याचा नियम आपणास बांधतां येईल; कांकीं, $अ^2 + २ अब + ब^2 = अ^2 + (२ अ + ब) ब$; आणि ∵ $अ^2$चें वर्गमूळ अ आहे, व हें मूळांतील पहिलें पद आहे, म्हणून आतां आपणास असा कांहीं भाजक काढिला पाहिजे कीं, ज्यानें भागिलें असतां + ब हा भागाकार येईल, आणि हें उघड आहे कीं तो भाजक २ अ + ब, म्हणजे मूळांतील पहिल्या पदाची दुप्पट व दुसरें पद ह्यांची बेरीज, आहे.

ह्यावरून $अ^2 + २ अब + ब^2$ ह्याचें वर्गमूळ काढावयाचें आहे, तर पहिल्यानें $अ^2$ चें मूळ अ हें घ्यावें, आणि तें मूळस्थानीं लिहावें, आणि त्याचा वर्ग $अ^2 + २ अब + ब^2$ ह्यांतून वजा करावा; मग भाजकाकरितां अ ह्या मूळाची दुप्पट करावी, आणि हिनें बाकी राहिलेल्या पदास भागावें म्हणजे (२ अ + ब) ब ह्यांस २ अ नीं भागावें, आणि जो भागाकार येईल तो मूळस्थानीं लिहावा, व भाजकास त्याच्या चिन्हासहित जोडावा; मग २ अ + ब ह्यास दुसरें पद म्हणजे ब ह्यानें गुणून तो गुणाकार वजा करावा. ही रीति खालच्या उदाहरणांत करून दाखवितों.

$$
\begin{array}{r|l}
 & अ^2+२अब+ब^2 \;(\; अ+ब \\
२अ+ब & अ^2 \\
\hline
 & २अब+ब^2 \\
 & २अब+ब^2 \\
\hline
\end{array}
$$

हा नियम १२२५ ह्या संख्येचें वर्गमूळ काढण्यास लावून पाहूं.

```
            १२२५ ( ३०+५, अथवा ३५.
             ९००*
६०+५, अथवा ६५ ) ३२५
                ३२५
```

अ^2+२अब+२अक+२बक+ब^2+क^2 ह्याचें वर्गमूळ काढावयाचें आहे असें मान;

```
          अ²+२अब+२अक+२बक+ब²+क² ( अ+ब+क.
          अ²
२ अ+ब )    २ अब         +ब²
           २ अब         +ब²
२ अ+२ब+क )    २ अक+२बक   +क²
              २ अक+२बक   +क²
```

ह्या उदाहरणांत अ+ब हीं दोन पदें निघाल्यानंतर बाकी राहिलेलें पद क हें काढण्याकरितां मूळस्थानच्या पहिल्या दोन पदांची नव्या भाजकाकरितां दुप्पट केली आहे.

(अ+ब) हें अ^3 + ३ अ^{2}ब+ ३ अब^2+ब^3 ह्याचें घनमूळ आहे, म्हणून ह्याचे योगानें घनमूळ काढण्याचा नियम आपणास बांधतां येईल. पहिलें पद अ^3 ह्याचें घनमूळ अ आहे, हें मूळांतील पहिलें पद आहे. सगळ्या पदांतून ह्याचा घन वजा करावा, मग भाजकाकरितां ३ अ^2 घ्यावे, आणि त्यांनीं बाकींतील पहिलें पद भागिलें असतां जो भागाकार ब येईल तो मूळांतील दुसरें पद होईल; मग ह्या भाजकांत ३ अब+ब^2 मिळवून त्या बेरजेस बनें गुणिलें म्हणजे ३ अ^{2}ब+३अब^2+ब^3 हा गुणाकार येतो, तो बाकीबरोबर आहे.

ही रीति खालच्या उदाहरणांत करून दाखवितों.

```
            अ³+३अ²ब+३अब²+ब³ ( अ+ब
            अ³
३ अ²+३अब+ब² )  ३अ²ब+३अब²+ब³
               ३अ²ब+३अब²+ब³
```

* व्यवहारांतील पूर्णांकामें रीतींत हीं दोन्ही शून्यें गाळतां येतील.

ह्या नियम आपण ९११२५ ह्या संख्येचें घनमूळ काढ-ण्यास लावून पाहूं.

अ   ब

९११२५ (४०+ ५, अथवा ४५

अ^3= ६४०००

३ अ^2=३×४०^2=४८००) २७१२५

३ अ^{2}ब=३×४०^2×५ = २४०००

३ अब^2=३×४०×५^2 = ३०००

ब^3 = ५^3 = १२५

२७१२५

गणितांतील साधारण रीति अशी आहे.

९११२५ (४५

६४

४^2×३ = ४८) २७१२५

५^3 = १२५

५^2×४×३ = ३००

५×४^2×३ = २४०

२७१२५

उदाहरणें.

१. ४अ^2+४अब+ब^2 ह्यांचें वर्गमूळ काढ.

४अ^2+४अब+ब^2 (२अ+ब=मूळ.

४ अ^2

४अ+ब) ४अब+ब^2

४अब+ब^2

२. √ (२९ क्ष^{2}य^2+३०क्षय^3+१२क्ष^{3}य+२५य^4+४क्ष^4).

$$९\,क्ष^{२}य^{२} + २०\,क्ष^{२}य^{२} + ३०\,क्षय^{३} + १२\,क्ष^{३}य + २५\,य^{४} + ४\,क्ष^{४}$$

$$९\,क्ष^{२}य^{२} \qquad (३क्षय + २क्ष^{२} + ५य^{२}.$$

$$६क्षय + २क्ष^{२}) \quad १२क्ष^{३}य \qquad + ४क्ष^{४}$$

$$१२क्ष^{३}य \qquad + ४क्ष^{४}$$

$$६क्षय + ४क्ष^{२} + ५य^{२}) \quad ३०क्षय^{३} + २०क्ष^{२}य^{२} + २५य^{४}$$

$$३०क्षय^{३} + २०क्ष^{२}य^{२} + २५य^{४}$$

ह्या उदाहरणांत $२९\,क्ष^{२}\,य^{२} = ९\,क्ष^{२}\,य^{२} + २०\,क्ष^{२}\,य^{२}$ व, जसजसें सोईस पडलें तसतशीं दुसरीं पदें खालीं घेतलीं आहेत.

३. $\sqrt{अ^{२} - क्ष^{२}}$

$$अ^{२} - क्ष^{२} \left(अ - \frac{क्ष^{२}}{२अ} - \frac{क्ष^{४}}{८अ^{३}} - \frac{क्ष^{६}}{१६अ^{५}} - \right. \text{इत्यादि} = \text{मूळ.}$$

$$अ^{२}$$

$$२अ - \frac{क्ष^{२}}{२अ}\Big) \; -क्ष^{२}$$

$$-क्ष^{२} + \frac{क्ष^{४}}{४अ^{२}}$$

$$२अ - \frac{क्ष^{२}}{अ} - \frac{क्ष^{४}}{८अ^{३}}\Big) \; - \frac{क्ष^{४}}{४अ^{२}}$$

$$- \frac{क्ष^{४}}{४अ^{२}} + \frac{क्ष^{६}}{८अ^{४}} + \frac{क्ष^{८}}{६४अ^{६}}$$

$$२अ - \frac{क्ष^{२}}{अ} - \frac{क्ष^{४}}{४अ^{३}}\Big) \quad - \frac{क्ष^{६}}{८अ^{४}} - \frac{क्ष^{८}}{६४अ^{६}}$$

येथें ही कृति संपावयाची नाहीं, व जें मूळ आहे तें $\sqrt{अ^२ - क्ष^३}$ ह्याचे किंमतीचे जवळजवळ मात्र आहे.

४. $८ अ^३ - ८४ अ^२क्ष + २९४ अक्ष^२ - ३४३ क्ष^३$ ह्याचें घनमूळ काढ.

$$८ अ^३ - ८४ अ^२क्ष + २९४ अक्ष^२ - ३४३ क्ष^३ \ (\ २ अ - ७ क्ष.$$

$$८ अ^३$$

$$(२अ)^२ × ३ = १२ अ^२) \quad - ८४ अ^२क्ष + २९४ अक्ष^२ - ३४३ क्ष^३$$

$$(-७क्ष)(२अ)^२ × ३ = \quad - ८४ अ^२क्ष$$

$$(-७क्ष)^२(२अ) × ३ = \quad + २९४ अक्ष^२$$

$$(-७क्ष)^३ = \quad - ३४३ क्ष^३$$

$$- ८४ अ^२क्ष + २९४ अक्ष^२ - ३४३ क्ष^३$$

५. $\sqrt[३]{(अ^३ + ३अ^२ब + ३अ^२क + ३अब^२ + ६अबक + ३अक^२ + ब^३ + ३ब^२क + ३बक^२ + क^३)}$.

अ^{३}+३अ^{२}ब+३अ^{२}क+३अब^{२}+६अबक+३अक^{२}+ब^{३}+३ब^{२}क+३बक^{२}+क^{३} (अ+ब+क.

अ^{३}

३ अ^{२}) ३ अ^{२}ब + ३ अब^{२} + ब^{३}

ब × अ^{२} × ३ = ३ अ^{२}ब

ब^{२} × अ × ३ = + ३ अब^{२}

ब^{३} = + ब^{३}

(अ+ब)^{२}×३=३अ^{२}+६अब+३ब^{२}) ३अ^{२}क +६अबक+३अक^{२} +३बक^{२}+३कब^{२}+क^{३}

क× (अ+ब)^{२}×३= ३अ^{२}क +६अबक +३कब^{२}

क^{२}× (अ+ब) ×३= + ३ अक^{२} + ३ बक^{२}

क^{३} = + क^{३}

३ अ^{२}क + ६ अबक + ३ अक^{२} + ३ बक^{२} + ३ कब^{२} + क^{३}.

६. असें दाखीव कीं, $\sqrt{४क्ष^२-४अक्ष+अ^२}$ = २क्ष-अ.

७. $\sqrt{१-८अ+१६अ^२}$ = १ - ४ अ.

८. $\sqrt{२५अ^२+४०अक्ष+१क्ष^२}$ = ५ अ + ४क्ष.

९. $\sqrt{९क्ष^२-३क्ष+\frac{१}{४}}$ = ३ क्ष - $\frac{१}{२}$.

१०. $\sqrt{४९अ^४+४२अ^२ब+९ब^२}$ = ७ अ^२ + ३ब.

११. $\sqrt{(क्ष^२-२अक्ष+अ^२+२क्ष-२अ+१)}$ = क्ष-अ+१.

१२. $\sqrt{(म^२+२म-१-\frac{२}{म}+\frac{१}{म^२})}$ = म+१-$\frac{१}{म}$.

१३. $\sqrt{\left(\frac{अ^२}{क्ष^२}-२+\frac{क्ष^२}{अ^२}+\frac{२अ^२}{क्ष}-२क्ष+अ^२\right)}=\frac{अ}{क्ष}-\frac{क्ष}{अ}$
+ अ.

१४. $\sqrt[३]{(अ^३-३अ^२क्ष+३अक्ष^२-क्ष^३)}$ = अ - क्ष.

१५. $\sqrt[३]{(१-१२अ+४८अ^२-६४अ^३)}$ = १-४अ.

१६. $\sqrt[३]{(८अ^३+३६अ^२ब+५४अब^२+२७ब^३)}$ = २अ+३ब.

१७. $\sqrt[३]{(क्ष^६-६क्ष^५+१५क्ष^४-२०क्ष^३+१५क्ष^२-६क्ष+१)}$
= क्ष^२ - २ क्ष + १.

१८. $\sqrt[३]{(य^६-६य^५+६य^४+१६य^३-१२य^२-२४य-८)}$
= य^२ - २ य - २.

प्रकरण ४.

करणी.

(१४) करणी अथवा खंडपदें तींच होत कीं, ज्यांचीं मूळें बरोबर समजत नाहींत; जसें,

$\sqrt{२}, \sqrt{५}, \sqrt[३]{४}, \sqrt[३]{३^{२}}, \sqrt{१+\text{क्ष}^{२}}, \sqrt[३]{\text{क्ष}^{३}+\text{अक्ष}}$, आणि $\sqrt[३]{२\text{क्ष}^{२}}$, हीं पदें खंड आहेत.

हीं मूळें अपूर्णांक घातप्रकाशकांनींही दाखवितां येतात; जसें, $२^{\frac{१}{२}}, ५^{\frac{१}{२}}, ४^{\frac{१}{३}}, ३^{\frac{२}{३}}, (१+\text{क्ष}^{२})^{\frac{१}{२}}, (\text{क्ष}^{३}+\text{अक्ष})^{\frac{१}{३}}$, आणि $(२\text{क्ष}^{२})^{\frac{१}{३}}$.

कोणत्याही अखंड पदास करणीचें रूप देतां येईल; जसें, $\text{क्ष} = \sqrt{\text{क्ष}^{२}} = \text{क्ष}^{\frac{२}{२}}$, $\text{क्ष}-\text{अ} = \sqrt[\text{न}]{(\text{क्ष}-\text{अ})^{\text{न}}} = (\text{क्ष}-\text{अ})^{\frac{\text{न}}{\text{न}}}$, $\text{अ}\sqrt{\text{क्ष}} = \text{अ}^{\frac{२}{२}}\text{क्ष}^{\frac{१}{२}} = (\text{अ}^{२}\text{क्ष})^{\frac{१}{२}} = \sqrt{\text{अ}^{२}\text{क्ष}}$.

उदाहरणें.

१. असें सिद्ध कर कीं, $\sqrt{२४३} + \sqrt{२७} + \sqrt{४८} = १६\sqrt{३}$.

$$\sqrt{२४३} = \sqrt{८१\times३} = ९\sqrt{३}$$
$$\sqrt{२७} = \sqrt{९\times३} = ३\sqrt{३}$$
$$\sqrt{४८} = \sqrt{१६\times३} = ४\sqrt{३}$$
$$\therefore \sqrt{२४३} + \sqrt{२७} + \sqrt{४८} = ९\sqrt{३} + ३\sqrt{३} + ४\sqrt{३} = (९+३+४)\sqrt{३} = १६\sqrt{३}.$$

२. असें सिद्ध कर कीं, $२\sqrt{८\text{अ}^{३}} - ७\text{अ}\sqrt{१८\text{अ}} + ५\sqrt{७२\text{अ}^{३}} - \sqrt{५०\text{अब}^{२}} = (१३\text{अ} - ५\text{ब})\sqrt{२\text{अ}}$.

$२\sqrt{८\text{अ}^{३}} = २\sqrt{४\times२\times\text{अ}^{२}\times\text{अ}} = २\times२\text{अ}\sqrt{२\text{अ}} = ४\text{अ}\sqrt{२\text{अ}}$, $-७\text{अ}\sqrt{१८\text{अ}} = -७\text{अ}\sqrt{९\times२\text{अ}} = -७\text{अ}\times३\sqrt{२\text{अ}} = -२१\text{अ}\sqrt{२\text{अ}}$,

$५\sqrt{७२\text{अ}^{३}} = ५\sqrt{३६\text{अ}^{२}+२\text{अ}} = ५\times६\text{अ}\sqrt{२\text{अ}}$

$= ३० अ \sqrt{२अ}$, $- \sqrt{५० अब^२} = - \sqrt{२५ब^२ \times २अ}$
$= - ५ ब \sqrt{२अ}$; आणि $४ अ \sqrt{२अ} - २१ अ \sqrt{२अ}$
$+ ३० अ \sqrt{२अ} - ५ ब \sqrt{२अ} = (४ अ - २१ अ$
$+ ३० अ - ५ ब) \sqrt{२अ} = (१३ अ - ५ ब) \sqrt{२अ}$.

३. $४ \sqrt{\frac{७}{३}} + ५ \sqrt{\frac{१}{२}}$ ह्यांस $\sqrt{\frac{७}{३}} + २ \sqrt{\frac{१}{२}}$ ह्यांनीं गूण.

हा गुणाकार बीजांतील साधारण पदांच्या गुणाकारांप्रमाणेंच करतां येईल; म्हणजे,

$$
\begin{array}{r}
४ \sqrt{\frac{७}{३}} + ५ \sqrt{\frac{१}{२}} \\
\sqrt{\frac{७}{३}} + २ \sqrt{\frac{१}{२}} \\
\hline
४ \times \frac{७}{३} + ५ \sqrt{\frac{७}{६}} \qquad\qquad\qquad \\
८ \sqrt{\frac{७}{६}} + १० \times \frac{१}{२} \\
\hline
\end{array}
$$

$\frac{२८}{३} + १३ \sqrt{\frac{७}{६}} + ५ = \frac{२८}{३} + \frac{१५}{३} + १३ \sqrt{\frac{७}{६}} = \frac{४३}{३}$
$+ १३ \sqrt{\frac{७}{६}}$.

४. असें सिद्ध कर कीं, $१२ \sqrt[३]{\frac{१}{४}} + ३ \sqrt[३]{\frac{१}{३२}} = \frac{२७}{४} \sqrt[३]{२}$

$$१२ \sqrt[३]{\frac{१}{४}} = १२ \sqrt[३]{\frac{२}{८}} = \frac{१२}{२} \sqrt[३]{२},$$

$$३ \sqrt[३]{\frac{१}{३२}} = ३ \sqrt[३]{\frac{२}{६४}} = \frac{३}{४} \sqrt[३]{२};$$

आणि $\frac{१२}{२} \sqrt[३]{२} + \frac{३}{४} \sqrt[३]{२} = \frac{२४}{४} \sqrt[३]{२} + \frac{३}{४} \sqrt[३]{२} = \frac{२७}{४} \sqrt[३]{२}$.

५. $(२ \sqrt{८} + ३ \sqrt{५} - ७ \sqrt{२})$ आणि
$(\sqrt{७२} - ५ \sqrt{२०} - २ \sqrt{२})$ ह्यांस अति सरळ रूप दे, आणि ह्यांचा गुणाकार काढ.

$$२ \sqrt{८} = २ \sqrt{४ \times २} = २ \times २ \sqrt{२} = ४ \sqrt{२},$$

$$\therefore २\sqrt{८} + ३\sqrt{५} - ७\sqrt{२} = ४\sqrt{२} + ३\sqrt{५} - ७\sqrt{२}$$
$$= ३ \sqrt{५} - ३ \sqrt{२};$$

$\sqrt{७२} = \sqrt{३६ \times २} = ६\sqrt{२},$

आणि $-५\sqrt{२०} = -५\sqrt{४ \times ५} = -५ \times २\sqrt{५} = -१०\sqrt{५},$

$\therefore\ \sqrt{७२} - ५\sqrt{२०} - २\sqrt{२} = ६\sqrt{२} - १०\sqrt{५} - २\sqrt{२}$

$= ४\sqrt{२} - १०\sqrt{५};$

$$\begin{array}{l} ३\sqrt{५} - ३\sqrt{२} \\ ४\sqrt{२} - १०\sqrt{५} \\ \hline १२\sqrt{१०} - १२ \times २ \\ \qquad - ३० \times ५ + ३०\sqrt{१०} \\ \hline ४२\sqrt{१०} - २४ - १५० = ४२\sqrt{१०} - १७४. \\ \hline \end{array}$$

६. $\dfrac{अ + ब\sqrt{-१}}{अ - ब\sqrt{-१}} + \dfrac{अ - ब\sqrt{-१}}{अ + ब\sqrt{-१}}$ हें एका अपूर्णपदांत आण.

ह्मांस समच्छेद केल्यानें,

$$\frac{अ + ब\sqrt{-१}}{अ - ब\sqrt{-१}} \times \frac{अ+ब\sqrt{-१}}{अ+ब\sqrt{-१}} = \frac{अ^२+२अब\sqrt{-१}+ब^२(-१)}{अ^२ - ब^२(-१)}$$

$$= \frac{अ^२+२अब\sqrt{-१}-ब^२}{अ^२+ब^२},$$

$$\frac{अ-ब\sqrt{-१}}{अ+ब\sqrt{-१}} \times \frac{अ-ब\sqrt{-१}}{अ-ब\sqrt{-१}} = \frac{अ^२-२अब\sqrt{-१}+ब^२(-१)}{अ^२-ब^२(-१)}$$

$$= \frac{अ^२-२अब\sqrt{-१}-ब}{अ^२+ब^२};$$

ह्मणून बेरीज घेतल्यानें,

$$\frac{अ+ब\sqrt{-१}}{अ-ब\sqrt{-१}} + \frac{अ-ब\sqrt{-१}}{अ+ब\sqrt{-१}} = \frac{२अ^२-२ब^२}{अ^२+ब^२} = \frac{२(अ^२-ब^२)}{अ^२+ब^२},$$

ह्या उदाहरणावरून द्वियुक्पद करणीचें अखंड पद करण्याची रीति निघते. कारण, ह्या उदाहरणांतील अपूर्ण पदांचे छेद अशा एका पदानें गुणिले कीं, ज्या गुणाकारानें ते अखंड पद झाले. $(क्ष + य)(क्ष - य) = (क्ष^{२} - य^{२})$, ह्यास्तव $अ \pm \sqrt{ब}$ आथवा $\sqrt{अ} \pm \sqrt{ब}$ असल्या रूपाचे करणीस त्यासारिख्याच $अ \mp \sqrt{ब}$ अथवा $\sqrt{अ} \mp \sqrt{ब}$ ह्यारूपाच्या करणीनें गुणिलें असतां तिला अखंड रूपांत आणतां येईल. ज्या वेळेस बेरीज दिली असेल त्यावेळेस वरचें चिन्ह धरावें, आणि त्यावेळेस वजाबाकी दिली असेल त्यावेळेस खालचें चिन्ह धरावें,

७. ह्यांत असें सिद्ध कर कीं,

$$\frac{१}{\sqrt{२} + \sqrt{३} - \sqrt{५}} = \frac{\sqrt{३०} + ३\sqrt{२} + २\sqrt{३}}{१२}.$$

ह्यांच्या दोन्ही पदांस $\sqrt{२} + \sqrt{३} + \sqrt{५}$ ह्यांनीं गूण,

$$\frac{१}{\sqrt{२}+\sqrt{३}-\sqrt{५}} \times \frac{\sqrt{२}+\sqrt{३}+\sqrt{५}}{\sqrt{२}+\sqrt{३}+\sqrt{५}} = \frac{\sqrt{२}+\sqrt{३}+\sqrt{५}}{२\sqrt{६}};$$

दोनही पदांस $\sqrt{६}$ ह्यांनीं गुणल्यानें,

$$\frac{\sqrt{१२} + \sqrt{१८} + \sqrt{३०}}{२+६} = \frac{२\sqrt{३} + ३\sqrt{२} + \sqrt{३०}}{१२}.$$

८. $अ^{\frac{३}{४}} + अ^{\frac{१}{२}} ब^{\frac{१}{२}} + अ^{\frac{१}{४}} ब + ब^{\frac{३}{२}}$ ह्यांस $अ^{\frac{१}{४}} - ब^{\frac{१}{२}}$ ह्यांनीं गूण.

$$\begin{array}{l} अ^{\frac{३}{४}} + अ^{\frac{१}{२}} ब^{\frac{१}{२}} + अ^{\frac{१}{४}} ब + ब^{\frac{३}{२}} \quad अ^{\frac{१}{४}} - ब^{\frac{१}{२}} \\ \hline अ + अ^{\frac{३}{४}} ब^{\frac{१}{२}} + अ^{\frac{१}{२}} ब + अ^{\frac{१}{४}} ब^{\frac{३}{२}} \\ \quad - अ^{\frac{३}{४}} ब^{\frac{१}{२}} - अ^{\frac{१}{२}} ब - अ^{\frac{१}{४}} ब^{\frac{३}{२}} - ब^{२} \\ \hline अ \quad * \quad * \quad * \quad - ब^{२}. \end{array}$$

९. ह्यांत असें दाखीव कीं,

$$\sqrt{\left\{१+\frac{११\text{अ}}{४}-(१+\text{अ})\sqrt{३\text{अ}}+\text{अ}^{२}\right\}}=१-\frac{\sqrt{३}}{२}\sqrt{\text{अ}}+\text{अ}.$$

$$१+\frac{११\text{अ}}{४}-\sqrt{३}\,\text{अ}^{\frac{१}{२}}-\sqrt{३}\,\text{अ}^{\frac{३}{२}}+\text{अ}^{२}\left(१-\frac{\sqrt{३}}{२}\text{अ}^{\frac{१}{२}}+\text{अ}.\right.$$

$$१$$

$$२-\frac{\sqrt{३}}{२}\text{अ}^{\frac{१}{२}}\Big)-\sqrt{३}\,\text{अ}^{\frac{१}{२}}+\frac{११\text{अ}}{४}$$

$$-\sqrt{३}\,\text{अ}^{\frac{१}{२}}+\frac{३\text{अ}}{४}$$

$$२-\sqrt{३}\,\text{अ}^{\frac{१}{२}}+\text{अ}\Big)\,२\text{अ}-\sqrt{३}\,\text{अ}^{\frac{३}{२}}+\text{अ}^{२}$$

$$२\text{अ}-\sqrt{३}\,\text{अ}^{\frac{३}{२}}+\text{अ}^{२}$$

* * *

१०. . असें दाखीव कीं, $\sqrt{१२}+\sqrt{२७}-\sqrt{३}+\sqrt{४८}=८\sqrt{३}.$

११. . $\sqrt[३]{४०}-२\sqrt[३]{३२०}+४\sqrt[३]{१३५}=२\sqrt[३]{५}.$

१२. . $\sqrt[३]{१६}-६\sqrt[३]{\frac{१}{४}}+२\sqrt[३]{५४}-४\sqrt[३]{\frac{१}{३२}}=४\sqrt[३]{२}.$

१३. . $२\sqrt{\frac{\text{अ}}{२}}-\text{ब}\sqrt{\frac{\text{अ}}{\text{ब}}}=\sqrt{२\text{अ}}-\sqrt{\text{अब}}.$

१४. . $५\sqrt{\text{अ}^{३}}-(४\text{अ})^{\frac{१}{२}}-३\text{अ}^{\frac{३}{२}}+\sqrt{१६\text{अ}}=२\text{अ}^{\frac{१}{२}}(\text{अ}+१).$

१५. . $२\sqrt[३]{२\text{क्ष}}+६\sqrt[६]{४\text{क्ष}^{२}}+\sqrt[९]{८\text{क्ष}^{३}}=९\sqrt[३]{२\text{क्ष}}.$

१६. . $\sqrt{१८\text{अ}^{५}\text{ब}^{३}}+\sqrt{५०\text{अ}^{३}\text{ब}^{३}}=$

$$(३\,\text{अ}^{२}\text{ब}+५\,\text{अब})\sqrt{२\text{अब}}.$$

१७ . . $\sqrt[३]{४}\times ७\sqrt[३]{६}\times\sqrt{\frac{५}{८}}=७\sqrt[३]{१५}.$

१८.. $(\sqrt{५}+१)(१-\sqrt{५}) = -४.$

१९.. $(\sqrt{३}+\sqrt{२})(\sqrt{३}-\sqrt{२}) = १.$

२०.. $\dfrac{\sqrt{अ}+\sqrt{ब}}{\sqrt{अ}-\sqrt{ब}} = \dfrac{अ + २ अ^{\frac{१}{२}} ब^{\frac{१}{२}} + ब}{अ - ब}.$

२१.. $\sqrt[६]{\dfrac{१}{क्ष^{३} य^{२}}} \times \sqrt[५]{क्ष^{३}} \times \sqrt[३]{य} = \dfrac{१}{क्ष^{\frac{१}{१०}}}.$

२२.. $\dfrac{\sqrt{३}-\sqrt{२}}{\sqrt{२}+१} = \sqrt{२}-\sqrt{३}+\sqrt{६}-२.$

२३.. $(\sqrt{३}+\sqrt{२})^{३} = ९\sqrt{३}+११\sqrt{२}.$

२४... $\dfrac{१}{क्ष-\sqrt{क्ष^{२}-१}} + \dfrac{१}{क्ष+\sqrt{क्ष^{२}-१}} = २क्ष.$

२५.. $\dfrac{\sqrt{क्ष+य}+\sqrt{क्ष-य}}{\sqrt{क्ष+य}-\sqrt{क्ष-य}} = \dfrac{क्ष}{य} + \dfrac{\sqrt{क्ष^{२}-य^{२}}}{य}.$

२६.. $\dfrac{\sqrt{अ^{२}-क्ष^{२}}}{२} + \dfrac{क्ष}{२} = \sqrt{\left(\dfrac{क्ष}{२}\sqrt{अ^{२}-क्ष^{२}+\dfrac{अ^{२}}{४}}\right)}$

२७.. $\left\{\dfrac{\sqrt{क्ष+\sqrt{क्ष^{२}-अ}}}{\sqrt{२}} + \dfrac{\sqrt{क्ष-\sqrt{क्ष^{२}-अ}}}{\sqrt{२}}\right\}^{२}$

$= क्ष + \sqrt{अ}.$

प्रकरण ५.

एकवर्ण समीकरणें.

१. $\sqrt{क्ष+१६} = २ + \sqrt{क्ष}$ ह्यांत क्षची किंमत काढ.

समीकरणाचे प्रत्येक बाजूचा वर्ग केल्यानें,

$$क्ष + १६ = ४ + ४\sqrt{क्ष} + क्ष,$$

$$१६ - ४ = ४\sqrt{क्ष},$$

$$१२ = ४\sqrt{क्ष},$$

$$३ = \sqrt{क्ष}, \therefore ९ = क्ष.$$

२. $\dfrac{क्ष-अ}{\sqrt{अ}+\sqrt{क्ष}} = \dfrac{\sqrt{क्ष}-\sqrt{अ}}{३} + २\sqrt{अ}$, ह्यांत क्षची किंमत काढ.

समीकरणाचे डावे बाजूस संक्षेप केल्यानें,

$$\frac{क्ष-अ}{\sqrt{अ}+\sqrt{क्ष}} = \frac{(\sqrt{क्ष}+\sqrt{अ})(\sqrt{क्ष}-\sqrt{अ})}{\sqrt{क्ष}+\sqrt{अ}} = \sqrt{क्ष}-\sqrt{अ};$$

$$\therefore \sqrt{क्ष}-\sqrt{अ} = \frac{\sqrt{क्ष}-\sqrt{अ}}{३} + २\sqrt{अ},$$

$$३(\sqrt{क्ष}-\sqrt{अ}) = (\sqrt{क्ष}-\sqrt{अ}) + ६\sqrt{अ},$$

$$२(\sqrt{क्ष}-\sqrt{अ}) = ६\sqrt{अ}; \sqrt{क्ष} - \sqrt{अ} = ३\sqrt{अ},$$

$$\sqrt{क्ष} = ४\sqrt{अ}, \therefore क्ष = १६अ.$$

३. $\dfrac{क्ष}{\sqrt{अ^२+क्ष^२}} = \dfrac{क-क्ष}{\{ब^२+(क-क्ष)^२\}^{\frac{१}{२}}}$.

दोनही बाजूंचे वर्ग केल्यानें,

$$\frac{क्ष^२}{अ^२+क्ष^२} = \frac{(क-क्ष)^२}{ब^२+(क-क्ष)^२};$$

छेदांचे गुणाकारानें गुणिल्यानें,

$$ब^२क्ष^२ + (क-क्ष)^२क्ष^२ = अ^२(क-क्ष)^२ + क्ष^२(क-क्ष)^२$$

$$ब^२क्ष^२ = अ^२(क-क्ष)^२; बक्ष = अ(क-क्ष) = अक-अक्ष;$$

$$अक्ष + बक्ष = अक, \; (अ+ब) क्ष = अक, \; \therefore क्ष = \frac{अक}{अ+ब}.$$

४. $१-\sqrt{१-क्ष} = न\,(१+\sqrt{१-क्ष}).$

$$१-\sqrt{१-क्ष} = न + न\sqrt{१-क्ष},$$

$$१-न = न\sqrt{१-क्ष}+\sqrt{१-क्ष} = (न+१)\sqrt{१-क्ष},$$

$$१-२न+न^२ = (न^२+२न+१)(१-क्ष),$$

$$= न^२ + २न + १ - क्ष(न+१)^२,$$

$$क्ष(न+१)^२ = ४न,$$

$$\therefore क्ष = \frac{४न}{(न+१)^२}$$

५. $क्ष-४ = \frac{क्ष^२}{(१+\sqrt{१+क्ष})^२}$ ह्यांत क्षची किंमत काढ.

$$\sqrt{क्ष-४} = \frac{क्ष}{\sqrt{१+क्ष}+१} = \frac{क्ष(\sqrt{१+क्ष}-१)}{(\sqrt{१+क्ष}+१)(\sqrt{१+क्ष}-१)}$$

$$= \frac{क्ष\sqrt{१+क्ष}-१)}{(१+क्ष-१)} = \frac{क्ष(\sqrt{१+क्ष}-१)}{क्ष} = \sqrt{१+क्ष}-१;$$

$$\therefore क्ष - ४ = १ + क्ष - २\sqrt{१+क्ष} \times १,$$

$$२\sqrt{१+क्ष} = ६, \; \sqrt{१+क्ष} = ३,$$

$$१ + क्ष = ९, \; \therefore क्ष = ८.$$

६. $८\sqrt{३क्ष}+\frac{२४३+३२४\sqrt{३क्ष}}{१६क्ष-३} = १६क्ष + ३.$

$$१६क्ष - ८\sqrt{३}\sqrt{क्ष} + ३ = \frac{८१(३+४\sqrt{३क्ष})}{१६क्ष-३}$$

$$= \frac{८१\sqrt{३}(\sqrt{३}+४\sqrt{क्ष})}{(४\sqrt{क्ष}+\sqrt{३})(४\sqrt{क्ष}-\sqrt{३})},$$

$$(४\sqrt{क्ष}-\sqrt{३})^2=\frac{८१\sqrt{३}}{४\sqrt{क्ष}-\sqrt{३}},\ (४\sqrt{क्ष}-\sqrt{३})^3=३^4\cdot ३^{\frac{1}{2}}$$

$$=३^{\frac{9}{2}},\ ४\sqrt{क्ष}-\sqrt{३}=३^{\frac{3}{2}},\ ४\sqrt{क्ष}=३^{\frac{3}{2}}+३^{\frac{1}{2}},$$

$$१६\,क्ष=३^3+३^2\cdot २+३=२७+१८+३=४८,\ \therefore क्ष=३.$$

७. $\sqrt[3]{अ+क्ष}+\sqrt[3]{अ-क्ष}=\sqrt[3]{ब}$, ह्यांत क्ष ची किंमत काढ.

$(अ+क्ष)^{\frac{1}{3}}+(अ-क्ष)^{\frac{1}{3}}=ब^{\frac{1}{3}}$; दोनही बाजूंचे घन केल्यानें,

$$अ+क्ष+अ-क्ष+३\left\{(अ+क्ष)^{\frac{1}{3}}+(अ-क्ष)^{\frac{1}{3}}\right\}$$

$$\times(अ+क्ष)^{\frac{1}{3}}(अ-क्ष)^{\frac{1}{3}}=ब,$$

$$३\left\{(अ+क्ष)^{\frac{1}{3}}+(अ-क्ष)^{\frac{1}{3}}\right\}(अ+क्ष)^{\frac{1}{3}}(अ-क्ष)^{\frac{1}{3}}=ब\cdot २अ,$$

$$३\,ब^{\frac{1}{3}}(अ+क्ष)^{\frac{1}{3}}(अ-क्ष)^{\frac{1}{3}}=ब-२अ,\ \because (अ+क्ष)^{\frac{1}{3}}+(अ-क्ष)^{\frac{1}{3}}=ब^{\frac{1}{3}},$$

$$\sqrt[3]{(अ+क्ष)(अ-क्ष)}=\frac{ब-२अ}{३ब^{\frac{1}{3}}},\ (अ+क्ष)(अ-क्ष)=\frac{(ब-२अ)^3}{२७ब},$$

$$अ^2-क्ष^2=\frac{(ब-२अ)^3}{२७\,ब},\ क्ष^2=अ^2-\frac{(ब-२अ)^3}{२७\,ब},$$

$$\therefore क्ष=\sqrt{अ^2-\frac{(ब-२अ)^3}{२७\,ब}}$$

८. $क्ष\sqrt{क्ष^4-१}+\sqrt[4]{क्ष^4-१}=क्ष^3$, ह्यांत क्ष ची किंमत काढ.

$$\sqrt[4]{क्ष^4-१}=क्ष^3-क्ष\sqrt{क्ष^4-१};\ \sqrt{क्ष^4-१}=क्ष^6-२क्ष^4\sqrt{क्ष^4-१}$$

$$+क्ष^6-क्ष^2;$$

$$\text{क्ष}^{२}+\sqrt{\text{क्ष}^{४}-१}=२\text{क्ष}^{६}-२\text{क्ष}^{४}\sqrt{\text{क्ष}^{४}-१}=२\text{क्ष}^{४}\left(\text{क्ष}^{२}-\sqrt{\text{क्ष}^{४}-१}\right);$$

दोन्ही बाजूंस $(\text{क्ष}^{२}+\sqrt{\text{क्ष}^{४}-१})$ ह्यांनीं गुणिल्यानें,

$$(\text{क्ष}^{२}+\sqrt{\text{क्ष}^{४}-१})^{२}=२\text{क्ष}^{४}(\text{क्ष}^{४}-\text{क्ष}^{४}+१)=२\text{क्ष}^{४};$$

$$\text{क्ष}^{२}+\sqrt{\text{क्ष}^{४}-१}=\text{क्ष}^{२}\sqrt{२},\ \sqrt{\text{क्ष}^{४}-१}=\text{क्ष}^{२}(\sqrt{२}-१);$$

$$\text{क्ष}^{४}-१=\text{क्ष}^{४}(३-२\sqrt{२})=३\text{क्ष}^{४}-२\text{क्ष}^{४}\sqrt{२},$$

$$(२\sqrt{२}-२)\text{क्ष}^{४}=१,\ \text{क्ष}^{४}=\frac{१}{२\sqrt{२}-२};$$

ह्या अपूर्णाकाच्या दोन्ही पदांस $\sqrt{२}+१$ ह्यांनीं गुणिल्यानें,

$$\text{क्ष}^{४}=\frac{\sqrt{२}+१}{२},\ \therefore\ \text{क्ष}=\sqrt[४]{\frac{\sqrt{२}+१}{२}}.$$

९. $$\frac{\text{अ}+\text{क्ष}}{\sqrt{\text{अ}}+\sqrt{\text{अ}+\text{क्ष}}}+\frac{\text{अ}-\text{क्ष}}{\sqrt{\text{अ}}+\sqrt{\text{अ}-\text{क्ष}}}=\sqrt{\text{अ}}.$$

$$\frac{(\text{अ}+\text{क्ष})(\sqrt{\text{अ}}-\sqrt{\text{अ}+\text{क्ष}})}{\text{अ}-\text{अ}+\text{क्ष}}+\frac{(\text{अ}-\text{क्ष})(\sqrt{\text{अ}}-\sqrt{\text{अ}-\text{क्ष}})}{\text{अ}-\text{अ}-\text{क्ष}}=\sqrt{\text{अ}}.$$

$$\frac{(\text{अ}+\text{क्ष})(\sqrt{\text{अ}}-\sqrt{\text{अ}+\text{क्ष}})}{-\text{क्ष}}+\frac{(\text{अ}-\text{क्ष})(\sqrt{\text{अ}}-\sqrt{\text{अ}-\text{क्ष}})}{\text{क्ष}}=\sqrt{\text{अ}}.$$

$$(\text{अ}-\text{क्ष})(\sqrt{\text{अ}}-\sqrt{\text{अ}-\text{क्ष}})-(\text{अ}+\text{क्ष})(\sqrt{\text{अ}}-\sqrt{\text{अ}+\text{क्ष}})=\sqrt{\text{अ}}\cdot\text{क्ष},$$

$$\text{अ}\sqrt{\text{अ}}-\sqrt{\text{अ}}\cdot\text{क्ष}-(\text{अ}-\text{क्ष})^{\frac{३}{२}}-\text{अ}\sqrt{\text{अ}}-\sqrt{\text{अ}}\cdot\text{क्ष}+(\text{अ}+\text{क्ष})^{\frac{३}{२}}=\sqrt{\text{अ}}\cdot\text{क्ष},$$

$$(\text{अ}+\text{क्ष})^{\frac{३}{२}}-(\text{अ}-\text{क्ष})^{\frac{३}{२}}=३\sqrt{\text{अ}}\cdot\text{क्ष},$$

$$(अ+क्ष)^3 + (अ-क्ष)^3 - २(अ^2-क्ष^2)^{\frac{3}{2}} = ९अक्ष,$$

$$२अ^3+६अक्ष^2-९अक्ष^2 = २(अ^2-क्ष^2)^{\frac{3}{2}},$$

$$२अ^3-३अक्ष^2 = २(अ^2-क्ष^2)^{\frac{3}{2}},$$

$$४अ^6-१२अ^4क्ष^2+९अ^2क्ष^4 = ४(अ^2-क्ष^2)^3,$$

$$=४अ^6-१२अ^4क्ष^2+१२अ^2क्ष^4-४क्ष^6,$$

$$४क्ष^6 = ३क्ष^4अ^2,\ ४क्ष^2=३अ^2,$$

$$२क्ष=अ\sqrt{३},\ \therefore क्ष=\frac{अ}{२}\sqrt{३}.$$

(१५). ज्या समीकरणांत क्ष आणि य अशीं दोन अव्यक्त पदें आहेत तीं समीकरणें सोडवावयाचीं असल्यास खालच्या तीन रीतींतून एकादी रीति घ्यावी.

१. दोन अव्यक्त पदांपैकीं एक अव्यक्त पद उडीव, आणि जें समीकरण निघेल, त्यापासून दुसऱ्या अव्यक्त पदाची किंमत काढ.

२. कोणत्याही एका अव्यक्त पदाची किंमत प्रत्येक समीकरणांतून काढ, आणि दोन किंमती बरावर मांड.

३. एका अव्यक्तपदाची किंमत कोणत्याही एका समीकरणांतून काढ, आणि ती दुसऱ्या समीकरणांत मांड.

१. $\left.\begin{array}{l}५ क्ष + ३ य = ७४. \\ ३ क्ष + २ य = ४६.\end{array}\right\}$ ह्यांत क्ष आणि य ह्यांच्या किंमती पहिल्या रीतीनें काढ.

पहिल्या समीकरणास दुसऱ्यांतील य चा जो वेळाप्रकाशक २ आहे, त्यानें गूण, आणि दुसऱ्या समीकरणास, पहिल्यांतील यचा जो वेळा प्रकाशक ३ आहे, त्यानें गूण.

$$१० क्ष + ६ य = १४८.$$

$$९ क्ष + ६ य = १३८.$$

आतां प्रत्येक समीकरणांत यचा वेळा प्रकाशक एकच आहे व चिन्हेंही सरूप आहेत, म्हणून खालचें समीकरण वर-

त्या समीकरणांत जर वर्जा केलें, तर य उडून जाईल.

$$क्ष = १० \;;\; \therefore ३\,क्ष = ३०.$$

आणि, दुसरे समीकरणांत ३ क्षचे जागीं ३० लिहिल्यानें,

$$३० + २य = ४६,\; २य = १६,\; \therefore य = ८.$$

जेव्हां तीन अथवा त्यांहून अधिक समीकरणें दिलीं आहेत, तेव्हां त्यांतील दोन दोन समीकरणांची एक एक जोडी घेऊन प्रत्येक जोडींतून तेंच अव्यक्त पद उडवावें.

२. $$\left.\begin{array}{l} क्ष^{म}\,य^{न} = अ \;\cdot\cdot\; (१) \\ क्ष^{प}\,य^{क} = ब \;\cdot\cdot\; (२) \end{array}\right\}$$ ह्यांत क्ष आणि य ह्यांच्या किंमती दुसरे रीतीनें काढ.

$$(१)\text{ ह्या पासून } क्ष^{म} = \frac{अ}{य^{न}},\quad \therefore क्ष = \frac{अ^{\frac{१}{म}}}{य^{\frac{न}{म}}};$$

$$(२)\;\cdots\cdots\; क्ष^{प} = \frac{ब}{य^{क}},\quad \therefore क्ष = \frac{ब^{\frac{१}{प}}}{य^{\frac{क}{प}}},$$

ह्या दोन्ही किंमती क्ष ह्याच पदांच्या आहेत, म्हणून त्या परस्पर बरोबर आहेत, ह्यास्तव त्यांचें समीकरण मांडल्यास चालेल; म्हणजे,

$$\frac{अ^{\frac{१}{म}}}{य^{\frac{न}{म}}} = \frac{ब^{\frac{१}{प}}}{य^{\frac{क}{प}}},\; \therefore \frac{य^{\frac{क}{प}}}{य^{\frac{न}{म}}} = \frac{ब^{\frac{१}{प}}}{अ^{\frac{१}{म}}},$$

$$\text{अथवा, } य^{\frac{क}{प} - \frac{न}{म}} = \frac{ब^{\frac{१}{प}}}{अ^{\frac{१}{म}}},$$

$$\text{अथवा, } य^{\frac{कम - नप}{पम}} = \frac{ब^{\frac{१}{प}}}{अ^{\frac{१}{म}}}$$

---

* जीं अव्यक्त पदें उडवायाचीं आहेत त्यांचीं चिन्हें सरूप नसतील, तेव्हां त्या दोन समीकरणांची बेरीज घ्यावी.

$$\therefore य = \left(\frac{ब^{\frac{१}{प}}}{अ^{\frac{न}{म}}}\right)^{\frac{पम}{कम-नप}} = \left(\frac{ब^{म}}{अ^{नप}}\right)^{\frac{१}{कम-नप}}.$$

ह्या प्रमाणेंच दोन्ही समीकरणांतून यच्या दोन किंमती काढून त्यांचें समीकरण केल्यानें,

$$क्ष = \left(\frac{अ^{क}}{ब^{न}}\right)^{\frac{१}{कम-नप}}.$$

३. $\left.\begin{array}{l} \frac{य}{क्ष} + \frac{२क्ष}{क्ष+य} = \frac{क्ष^{२}-य^{२}}{य} \cdots (१) \\ \frac{क्ष}{य} = \frac{क्ष+य}{क्ष} + \frac{य}{क्ष} \cdots (२) \end{array}\right\}$ ह्यांत क्ष आणि य ह्यांच्या किंमती तिसऱ्या रीतीनें काढ.

(२) $\frac{क्ष}{य} - \frac{य}{क्ष} = \frac{क्ष+य}{क्ष}, \frac{क्ष^{२}-य^{२}}{क्षय} = \frac{क्ष+य}{क्ष};$

आणि दोन्ही बाजूंस $\frac{क्ष+य}{क्ष}$ ह्यानें भागल्यानें,

$$\frac{क्ष-य}{य} = १, \ \therefore क्ष - य = य;$$

$\left.\begin{array}{l} क्ष=२य \\ क्ष^{२}=४य^{२} \end{array}\right\}$ ह्या किंमती (१) ह्यांत ठेवल्यानें,

$$\frac{य}{२य} + \frac{६ य}{२य + य} = \frac{४ य^{२}-य^{२}}{य}, \frac{१}{२} + \frac{६}{२+१} = ४ य - य, \frac{१}{२} + \frac{६}{३} = ३ य,$$

$$३ + १२ = १८ य, \quad अथवा, १८ य = १५,$$

$$\therefore य = \frac{१५}{१८} = \frac{५}{६}, आणि\ क्ष = २ य = \frac{५}{३}.$$

४. $\frac{क्षय}{क्ष+य} = ७०, \frac{क्षज्ञ}{क्ष+ज्ञ} = ८४, \frac{यज्ञ}{य+ज्ञ} = १४०;$

ह्यांत क्ष, य, आणि ज्ञ ह्यांच्या किंमती काढ.

पहिल्या समीकरणांतील प्रत्येक बाजूचा व्युत्क्रम* घेतल्यानें,

$$\frac{क्ष+य}{क्षय} = \frac{१}{७०}, \text{ अथवा } \frac{क्ष}{क्षय} + \frac{य}{क्षय} = \frac{१}{७०};$$

$$\therefore \frac{१}{क्ष} + \frac{१}{य} = \frac{१}{७०}, \quad \cdots (१)$$

$$\frac{१}{क्ष} + \frac{१}{ज्ञ} = \frac{१}{८४}, \quad \cdots (२)$$

$$\frac{१}{य} + \frac{१}{ज्ञ} = \frac{१}{१४०}, \quad \cdots (३)$$

आणि ह्या प्रमाणेंच दुसऱ्या आणि तिसऱ्या समीकरणांपासून,

$$(१)\ \frac{१}{क्ष} + \frac{१}{य} = \frac{२}{१४०}, \text{ ह्यांतून (३) वजा केल्यानें,}$$

$$\frac{१}{क्ष} - \frac{१}{ज्ञ} = \frac{१}{१४०} = \frac{३}{४२०},$$

$$(२)\ \frac{१}{क्ष} + \frac{१}{ज्ञ} = \frac{१}{८४} = \frac{५}{४२०}$$

$$\therefore \frac{२}{क्ष} = \frac{८}{४२०} = \frac{२}{१०५}, \therefore क्ष = १०५.$$

$$\text{आणि } \frac{२}{ज्ञ} = \frac{२}{४२०}, \quad \therefore ज्ञ = ४२०.$$

$$(३)\ \frac{१}{य} + \frac{१}{४२०} = \frac{१}{४२०}, \therefore \frac{१}{य} = \frac{३}{४२०} - \frac{१}{४२०}$$

---

* एकास कोणत्याही पदानें भागलें म्हणजे तो भागाकार त्या पदाचा व्युत्क्रम होतो. जसें, क्ष, $\frac{क्ष}{क}$, आणि $\frac{अ+ब}{क्ष}$, ह्यांचे व्युत्क्रम अनुक्रमें, $\frac{१}{क्ष}$, $\frac{क}{क्ष}$, आणि $\frac{क्ष}{अ+ब}$, हे आहेत.

$$=\frac{२}{४२०}=\frac{१}{२१०},\ \therefore\ ब=२१०.$$

हीं पुढील एकवर्ण समीकरणें सोडीव.

१. $\sqrt{क्ष^{२}+३}=\sqrt{७}$. उत्तर. क्ष = २.

२. $\sqrt{क्ष^{२}-१६}=क्ष-२$. उत्तर. क्ष = ५.

३. $\sqrt{क्ष}-१=\sqrt{क्ष-९}$. उत्तर. क्ष = २५.

४. $\sqrt{क्ष}+\sqrt{क्ष-३}=३$. उत्तर. क्ष = ४.

५. $\sqrt{क्ष}-\sqrt{२}=\sqrt{क्ष-२}$. उत्तर. क्ष = २.

६. $\sqrt[३]{४\,क्ष+३}=३$. उत्तर. क्ष = ६.

७. $\sqrt{५\,क्ष+४}=\sqrt{३\,क्ष}+२$. उत्तर. क्ष = १२.

८. $\sqrt{क्ष^{२}+अ^{२}}+क्ष=ब$. उत्तर. $क्ष=\frac{ब^{२}-अ^{२}}{२ब}$.

९. $२\sqrt{क्ष}-\sqrt{अ}=२\sqrt{क्ष-अ}$. उत्तर. $क्ष=\frac{२५अ}{१६}$.

१०. $अ+क्ष=\sqrt{क्ष^{२}+५क्ष-अ}$ उत्तर. $क्ष=\frac{अ^{२}+अ}{५-२अ}$.

११. $\sqrt{अ^{२}+क्ष^{२}}=\sqrt[४]{ब^{४}+क्ष^{४}}$. उत्तर. $क्ष=\sqrt{\frac{ब^{४}-अ^{४}}{२अ^{२}}}$.

१२. $\sqrt{अ-क्ष}=\frac{अ}{\sqrt{अ-क्ष}}-क्ष$. उत्तर. क्ष = अ−१.

१३. $\sqrt{अ+क्ष}+\sqrt{अ-क्ष}=२\sqrt{क्ष}$. उत्तर. $क्ष=\frac{४}{५}अ$.

१४. $\frac{\sqrt{क्ष}-२}{३}+३=\frac{क्ष-४}{\sqrt{क्ष}+२}$. उत्तर. $क्ष=४२\frac{१}{४}$.

१५. $क्ष-\sqrt{अ^{२}+क्ष\sqrt{क्ष^{२}-१}}=अ$. उत्तर. $क्ष=\frac{४अ^{२}+१}{४अ}$.

१६. $\frac{\sqrt{अ+क्ष}+\sqrt{अ-क्ष}}{\sqrt{अ+क्ष}-\sqrt{अ-क्ष}}=क.$ उत्तर. $क्ष=\frac{२अक}{क^{२}+१}.$

१७. $\sqrt{क्ष+अ}=\sqrt{अ}+\sqrt{क्ष-अ}.$ उत्तर. $क्ष=\frac{५अ}{४}.$

१८ $\sqrt{क्ष}-\sqrt{अ-क्ष}=\frac{\sqrt{क्ष}+\sqrt{अ-क्ष}}{२}$ उत्तर. $क्ष=\frac{९अ}{१०}.$

१९. $\sqrt{\frac{अ^{२}}{क्ष}+ब}-\sqrt{\frac{अ}{क्ष}-ब}=क.$ उत्तर. $क्ष=\frac{४अक^{२}}{४ब^{२}+क^{२}}.$

२०. *$\sqrt{क्ष^{२}+९}=२+\frac{क्ष^{२}-९}{\sqrt{क्ष^{२}+९}+२}.$ उत्तर. $क्ष=२\sqrt{१५}.$

२१. $\frac{नअ^{२}}{\sqrt{क्ष^{२}+अ^{२}}}-क्ष=\sqrt{अ^{२}+क्ष^{२}}.$ उत्तर. $क्ष=\frac{(न-१)अ}{(२न-१)^{\frac{१}{२}}}.$

२२. $अक्ष-\sqrt{क्ष^{२}+क्ष+१}=\sqrt{क्ष^{२}-क्ष+१}.$

उत्तर. $क्ष=\frac{२}{अ}\sqrt{\frac{अ^{२}-१}{अ^{२}-४}}.$

२३. $\sqrt{अ^{२}+अक्ष}=अ-\sqrt{अ^{२}-अक्ष}.$

उत्तर. $क्ष=\frac{अ}{२}\sqrt{३}.$

२४. $\frac{१}{क्ष}+\frac{१}{अ}=\sqrt{\frac{१}{अ^{२}}+\sqrt{\frac{४}{ब^{२}क्ष^{२}}+\frac{१}{क्ष^{४}}}}.$

उत्तर. $क्ष=\frac{अब^{२}}{अ^{२}-ब^{२}}.$

---

* हें उदाहरण सोडवतांना $\sqrt{क्ष^{२}+९}=-१२$, म्हणून ताळा पाहातांना $\sqrt{क्ष^{२}\times९}=-१२$ घ्यावे; नाहीं तर ताळा जमणार नाहीं, आणि उत्तर खोटें भासूं लागेल.

२५. $\dfrac{\text{अक्ष}-१}{\sqrt{\text{अक्ष}}+१}-४=\dfrac{\sqrt{\text{अक्ष}}-१}{२}.$

उत्तर. $\text{क्ष}=\dfrac{८१}{\text{अ}}.$

२६. $\dfrac{१}{२}\sqrt{\text{क्ष}^{२}+२\text{अ}^{३}}+\dfrac{१}{२}\sqrt{\text{क्ष}^{२}-२\text{अ}^{३}}=\text{क्ष}\sqrt{\text{अ}}.$

उत्तर. $\text{क्ष}=\sqrt[४]{\dfrac{९\text{अ}^{३}}{४-४\text{अ}}}.$

२७. $\dfrac{१}{\sqrt{१-\text{क्ष}}+१}+\dfrac{१}{\sqrt{१+\text{क्ष}}-१}=\dfrac{१}{\text{क्ष}}$

उत्तर. $\text{क्ष}=\dfrac{\sqrt{३}}{२}.$

२८. $\sqrt[३]{१+\text{क्ष}}+\sqrt[३]{१-\text{क्ष}}=\sqrt[३]{२}.$ उत्तर. क्ष=१.

२९. $\dfrac{\text{क्ष}+\sqrt{\text{क्ष}-१}}{\text{क्ष}-\sqrt{\text{क्ष}^{२}-१}}+\dfrac{\text{क्ष}-\sqrt{\text{क्ष}^{२}-१}}{\text{क्ष}+\sqrt{\text{क्ष}^{२}-१}}=४\,\text{क्ष}\,(\text{क्ष}-१).$

उत्तर. $\text{क्ष}=\dfrac{१}{२}.$

३०. क्ष+य=५.
क्ष−य=१. } ह्यांत क्ष आणि य ह्यांच्या किंमती काढ.

उत्तर. { क्ष=३. य=२.

३१. २ क्ष−य=१
क्ष+३य=११ } उत्तर. { क्ष=२. य=३.

३२. ४ क्ष−११य=९.
२ क्ष+३य=१३ } उत्तर. { क्ष=५. य=१.

३३. $$\left.\begin{array}{l}\text{३ क्ष}+\text{२य}=\text{२३}.\\ \text{५ य}-\text{२क्ष}=\text{२९}.\end{array}\right\}\quad \text{उत्तर.}\left\{\begin{array}{l}\text{क्ष}=\text{३}.\\ \text{य}=\text{७}.\end{array}\right.$$

३४. $$\left.\begin{array}{l}\frac{\text{क्ष}}{\text{२}}-\text{य}=\text{१}.\\ \text{क्ष}-\frac{\text{य}}{\text{२}}=\text{८}.\end{array}\right\}\quad \text{उत्तर.}\left\{\begin{array}{l}\text{क्ष}=\text{१०}.\\ \text{य}=\text{४}.\end{array}\right.$$

३५. $$\left.\begin{array}{l}\frac{\text{क्ष}}{\text{३}}+\frac{\text{य}}{\text{५}}-\text{५}=\text{०}.\\ \text{२क्ष}+\frac{\text{य}}{\text{३}}-\text{१७}=\text{०}\end{array}\right\}\quad \text{उत्तर.}\left\{\begin{array}{l}\text{क्ष}=\text{६}.\\ \text{य}=\text{१५}.\end{array}\right.$$

३६. $$\left.\begin{array}{l}\frac{\text{क्ष}+\text{य}}{\text{१०}}+\frac{\text{क्ष}-\text{य}}{\text{२}}=\text{०}.\\ \frac{\text{क्ष}+\text{य}}{\text{५}}+\frac{\text{क्ष}-\text{य}}{\text{२}}=\text{१}.\end{array}\right\}\text{उत्तर.}\left\{\begin{array}{l}\text{क्ष}=\text{४}.\\ \text{य}=\text{६}.\end{array}\right.$$

३७. $$\left.\begin{array}{l}\frac{\text{२क्ष}-\text{य}}{\text{४}}-\frac{\text{३}}{\text{२}}=\frac{\text{३य}}{\text{४}}-\text{क्ष}-\text{२}.\\ \frac{\text{क्ष}+\text{य}}{\text{३}}=\text{२}\ \frac{\text{२}}{\text{३}}\end{array}\right\}\text{उ०}\ \begin{array}{l}\text{क्ष}=\text{३}.\\ \text{य}=\text{५}.\end{array}$$

३८. $$\left.\begin{array}{l}\text{अक्ष}+\text{बय}=\text{क}.\\ \frac{\text{क्ष}}{\text{ब}}-\frac{\text{य}}{\text{अ}}=\text{१}.\end{array}\right\}\text{उत्तर.}\left\{\begin{array}{l}\text{क्ष}=\frac{\text{अब}+\text{क}}{\text{२अ}}\\ \text{य}=\frac{-\text{अब}+\text{क}}{\text{२ब}}.\end{array}\right.$$

३९. $$\left.\begin{array}{l}\frac{\text{क्ष}+\text{२}}{\text{य}}=\frac{\text{७}}{\text{८}}.\\ \frac{\text{क्ष}}{\text{य}-\text{२}}=\frac{\text{५}}{\text{६}}.\end{array}\right\}\text{उत्तर.}\left\{\begin{array}{l}\text{क्ष}=\text{५}.\\ \text{य}=\text{८}.\end{array}\right.$$

४०. $$\left.\begin{array}{l}\frac{\text{म}}{\text{क्ष}}+\frac{\text{न}}{\text{य}}=\text{अ}\\ \frac{\text{न}}{\text{क्ष}}+\frac{\text{म}}{\text{य}}=\text{ब}.\end{array}\right\}\text{उत्तर.}\left\{\begin{array}{l}\text{क्ष}=\frac{\text{म}^{\text{२}}-\text{न}^{\text{२}}}{\text{मअ}-\text{नब}}\\ \text{य}=\frac{\text{म}^{\text{२}}-\text{न}^{\text{२}}}{\text{मब}-\text{नअ}}\end{array}\right.$$

४१. $$\left.\begin{array}{l}(\text{क्ष} + १)(\text{य} - ९) = (\text{य} + ७)(\text{क्ष} + ५) - ११२. \\ ३\,\text{य} - २\,\text{क्ष} = ९.\end{array}\right\}$$

$$\text{उत्तर.} \left\{\begin{array}{l}\text{क्ष} = ३. \\ \text{य} = ५.\end{array}\right.$$

४२. $$\left.\begin{array}{l}\text{य} + \dfrac{\text{क्ष}}{४} = १० - \dfrac{\text{य} - २\text{क्ष} - १}{३}. \\ \dfrac{२\,\text{क्ष} - १}{१०} - \dfrac{६\text{क्ष} - २\text{य}}{५} = \dfrac{\text{क्ष} - \text{य}}{१०}.\end{array}\right\} \text{उ०} \left\{\begin{array}{l}\text{क्ष} = ४. \\ \text{य} = ९.\end{array}\right.$$

४३. $$\left.\begin{array}{l}३.४\,\text{क्ष} - .०२\,\text{क्ष} = .०१. \\ २\text{क्ष} + .४\,\text{य} = १.२.\end{array}\right\} \text{उत्तर.} \left\{\begin{array}{l}\text{क्ष} = .०२. \\ \text{य} = २.९.\end{array}\right.$$

४४. $$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\text{क्ष} + \text{अय}}{३} = \text{क} \\ \text{अक्ष} - \text{बय} = \text{क}\end{array}\right\} \text{उत्तर.} \left\{\begin{array}{l}\text{क्ष} = \dfrac{(\text{अ} + ३\,\text{ब})\,\text{क}}{\text{अ}^२ + \text{ब}}. \\ \text{य} = \dfrac{(३\,\text{अ} - १)\,\text{क}}{\text{अ}^२ + \text{ब}}.\end{array}\right.$$

४५. $$\left.\begin{array}{l}\text{अक्ष} + \text{बय} = \text{क}^२. \\ \text{अ}(\text{अ} + \text{क्ष}) = \text{ब}(\text{ब} + \text{य}).\end{array}\right\} \text{उत्तर.} \left\{\begin{array}{l}\text{क्ष} = \dfrac{\text{ब}^२ + \text{क}^२ - \text{अ}^२}{२\text{अ}}. \\ \text{य} = \dfrac{\text{अ}^२ + \text{क}^२ - \text{ब}^२}{२\,\text{ब}}.\end{array}\right.$$

४६. $$\left.\begin{array}{l}२\,\text{क्ष} - २\,\text{य} + ३\,\text{ज्ञ} = १६. \\ ३\,\text{क्ष} + ५\,\text{य} - २\,\text{ज्ञ} = ६. \\ ४\,\text{क्ष} + ३\,\text{य} - ४\,\text{ज्ञ} = -१.\end{array}\right\} \text{उत्तर.} \left\{\begin{array}{l}\text{क्ष} = ३. \\ \text{य} = १. \\ \text{ज्ञ} = ४.\end{array}\right.$$

४७. $$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\text{क्ष}}{२} + \dfrac{\text{य}}{३} + \dfrac{\text{ज्ञ}}{४} = ६२. \\ \dfrac{\text{क्ष}}{३} + \dfrac{\text{य}}{४} + \dfrac{\text{ज्ञ}}{५} = ४७. \\ \dfrac{\text{क्ष}}{४} + \dfrac{\text{य}}{५} + \dfrac{\text{ज्ञ}}{६} = ३८.\end{array}\right\} \text{उत्तर.} \left\{\begin{array}{l}\text{क्ष} = २४. \\ \text{य} = ६०. \\ \text{ज्ञ} = १२०\end{array}\right.$$

४८. $\frac{क्ष+य}{ज्ञ}=५.$ $\frac{य-ज्ञ}{क्ष}=१.$ $\frac{क्ष-ज्ञ}{य}=\frac{१}{३}.$ } उत्तर. { क्ष=४. य=६. ज्ञ=२.

४९. क्षयज्ञ=४०. क्षयह=८०. यज्ञह=२००. क्षज्ञह=१००. } उत्तर. क्ष=२. य=४. ज्ञ=५. ह=१०.

प्रश्न.

१. अशी कोणती संख्या आहे कीं, जिचे दुपटींत ९ मिळविले असतां, त्या बेरजेचें वर्गमूळ ५ होईल.

उत्तर. ८.

२. अशी संख्या काढ कीं, जिचें पांचपटींत ४ मिळविले असतां, त्या बेरजेचें वर्गमूळ त्याच संख्येच्या तिपटीचे वर्गमूळाहून दोन हांनीं अधिक होईल. उत्तर. १२.

३. अशी संख्या काढ कीं, जिचे वर्गांतून ७ वजा करून जी बाकी राहील, तिचें वर्गमूळ व जी संख्या ७ तांत वजा करून जी बाकी राहील ती, हीं बरोबर होतील.

उत्तर. ४.

४. अशा दोन संख्या काढ, कीं ज्यांची बेरीज ५६ होईल, आणि वजाबाकी २४ होईल. उत्तर. ४० आणि १६.

५. अशा दोन संख्या काढ, कीं ज्यांची बेरीज १६ होईल, आणि ज्यांचे व्युत्क्रमांची बेरीज त्याच व्युत्क्रमांचे वजाबाकीचे दुपटी बरोबर होईल.

उत्तर. ४ आणि १२.

६. समुद्रावरील एका लढाईत आरमाराचा १/३ शत्रूनें घेतला, १/६ समुद्रांत बुडिवला, आणि दोन जहाजें जाळलीं. लढाई झाल्यानंतर जीं जाहजें राहिलीं, त्यांचा १/७ तुफानांत गमावला, आणि शेवटीं २४ जहाजें राहिलीं, तर प्रथमतः जहाजें किती होतीं ?

उत्तर. ६०.

७. दोन पुरुषांचीं वयें ३ : ४ ह्या प्रमाणांत आहेत, परंतु १० वर्षां पूर्वीं त्यांचीं वयें २ : ३ ह्या प्रमाणांत होतीं; तर त्यांचीं वयें काय आहेत ?

उत्तर. ३० आणि ४०.

८. एका दारू विकणारानें ९ शिलिंग दराचे २० शेर आणि ११ शिलिंग दराचे ३६ शेर एकत्र केले, आणि त्यास पुढें असें वाटूं लागलें कीं; त्या मिश्रणांत १४ शिलिंग दराचे दारूचे कांहीं शेर मिळवावे, अशा रीतीनें कीं जेणेंकरून त्या मिश्रणाचा दर १२ शिलिंग होईल; तर त्यानें तिसरे प्रकारचे दारूचे किती शेर मिळवावे ?

उत्तर. ४८ शेर.

९. एका कुणब्यानें एका व्यापाऱ्यापासून २१ पौंडांस १२ मेंढरें आणि २० कोंकरें विकत घेतलीं, आणि दुसऱ्या एकापासून त्याच दरानें ३३ पौंड १० शिलिंग ह्यांस १० मेंढरें आणि ३० कोंकरें विकत घेतलीं; तर एकेकाची किंमत काय होती ?

उत्तर. मेंढराची २५ शिलिंग, आणि कोंकराची १४ शि०.

१०. अ आणि ब ह्या दोन व्यापाऱ्यांनीं ८३३ पौंड भांडवल व्यापारांत घातलें, कांहीं दिवसपर्यंत चांगला व्यापार करून, त्यांस निका नफा १५३ पौंड झाला, व त्यापैकीं ब स अपेक्षां ४५ पौंड जाजती मिळाले; तर त्या भांडवलांत प्रत्येकाचा पैसा किती किती होता ?

उत्तर. अ २९४ पौंड, आणि ब ५३९ पौंड.

११. जर एका शेतकऱ्यास दाहा दाहा मेंढरांस एकेक एकर जमीन नांगरावी लागते, आणि चारचार मेंढरांस एकेक एकर जमीन चारणीकरितां घ्यावी लागते; तर ह्याप्रमाणानें ज्या कुणब्याकडे ७०० एकर जमीन आहे तो किती मेंढरें पाळीत असेल ?

उत्तर. २००० मेंढरें.

१२. अशी कोणती संख्या आहे, कीं जींत १, ५, आणि १३ हे अंक वेगळे वेगळे मिळविले, तर पहिली बेरीज जशी दुसरे बेरजेस, तशी दुसरी बेरीज तिसरे बेरजेस होईल.

उत्तर. ३.

१३. असा एक अपूर्णांक काढ, कीं ज्याचे अंशांत ज्याचा छेद मिळविला तर ती बेरीज अंशांचे पांच पटी बरोबर होईल, आणि ज्याचे अंशांत एक मिळविला तर ज्याची किंमत $\frac{1}{2}$ होईल.

उत्तर. $\frac{1}{4}$.

१४. अ, क ठिकाणाहून ड ठिकाणाकडे जाण्यास निघाला आणि त्याचवेळेस ब, डहून ककडे यावयास निघाला; त्यांची वाटेनें गांठ पडल्यावर अ, ड येथें अ' तासांत पोहोंचला, आणि ब, क येथें ब' तासांत पोहोंचला; तर एकेकाला तें सगळें अंतर चालावयास किती तास लागले?

उत्तर. अ, $\text{अ}'^{\frac{1}{2}}(\text{अ}'^{\frac{1}{2}}+\text{ब}'^{\frac{1}{2}})$; आणि ब, $\text{ब}'^{\frac{1}{2}}(\text{अ}'^{\frac{1}{2}}+\text{ब}'^{\frac{1}{2}})$.

१५. एके कलालाजवळ दोन प्रकारची दारू होती, एक २० आणे शेराच्या दराची होती, आणि दुसरी १२ आणे शेराच्या दराची होती. मग त्यानें दोन्ही मिळवून १४ आणे शेराच्या दराचें एक शेर मिश्रण केलें, तर त्यानें त्यांत एकेक प्रकारची दारू किती किती मिळविली ?

उत्तर. पहिलीचा $\frac{1}{4}$ शेर आणि दुसरीचे $\frac{3}{4}$ शेर.

१६. दोन आंकड्यांची अशी एक संख्या काढ, कीं ज्या आंकड्यांचे बेरजेची पांचपट त्या संख्येबरोबर होईल, आ-

कि त्या संख्येंत ९ मिळविले असतां जी एकंदर बेरीज येईल तींत त्या आंकड्यांची व्युत्क्रमस्थिति होईल.

उत्तर. ४५.

१७.. एका मनुष्यानें खेळतां खेळतां, आपल्या बरोबर जितकें द्रव्य आणिलें होतें त्याचे दुप्पट जिंकिलें, नंतर १६ शिलिंग गमाविले, पुढें त्यानें खेळ चालला असतां बाकी जो त्याजवळ पैसा राहिला होता त्याचे $\frac{४}{५}$ गमावले, नंतर मूळचे द्रव्याइतकें द्रव्य जिंकिलें, आणि मग तो आपलें द्रव्य मोजून पाहातो तों ८० शिलिंग भरले; तर त्यानें किती द्रव्य घेऊन खेळावयास प्रारंभ केला ?

उत्तर. ५२ शिलिंग.

१८. कांहीं एक काम अ, अ' दिवसांत करितो, आणि तेंच काम ब ब' दिवसांत करितो; तर ते दोघे एकदम तें काम करूं लागले तर किती दिवसांत संपवितील ?

उत्तर. $\frac{अ' ब'}{अ'+ब'}$ दिवस.

१९. एका व्यापाऱ्यानें तीन वर्षेंपर्यंत दरसाल ५० पौंड खर्च करून आपला संसार केला, आणि जी जी बाकी राहात गेली तींत दरवर्षीं तिचा $\frac{१}{३}$ भर घालीत गेला. नंतर तिसऱ्या वर्षाचे अंतीं तो आपलें द्रव्य मोजून पाहातो तों तें मूळच्या भांडवलाचे दुप्पट भरलें; तर त्याचें मूळचें भांडवल किती होतें?

उत्तर. ७४० पौंड.

२०. एक मनुष्य ऐन भरतीचे वेळेस एका तासाचे $\frac{३}{४}$ शांत ५ मैल लांब होडी नेतो, व जेव्हां भरतीचा जोर $\frac{१}{२}$ कमी होतो तेव्हां त्यास तितकेच मैल परत यावयास $१\frac{१}{३}$ तास लागतो; तर जेव्हां भरतीचा वेग अत्यंत आहे तेव्हां पाणी एक तासांत किती लांब जातें ?

उत्तर. एक तासांत $२\frac{१}{२}$ मैल.

२१. ११५२० ह्या संख्येचे असे तीन भाग कर, कीं पहिल्या आणि दुसऱ्या भागांच्या बेरजेची नऊपट, दुसऱ्या आणि तिसऱ्या भागांच्या बेरजेच्या सात पटी बरोबर होईल, आणि पहिला भाग दुसरे भागांतून वजा करून जी बाकी राहील तिची आठपट, पहिल्या आणि तिसऱ्या भागांचे बेरजेबरोबर होईल.

उत्तर. २८८०, ३८४०, आणि ४८००.

२२. एका मनुष्यानें ९४ पौंडांस कांहीं मेंढरें विकत घेतलीं, पुढें त्यांपैकीं ७ देऊन टाकून बाकीच्या मेंढरांचा $\frac{३}{४}$ पहिल्या दराप्रमाणेंच २० पौंडांस विकला; तर त्यानें मुळीं किती मेंढरें घेतलीं होतीं ?

उत्तर. ४७ मेंढरें.

२३. एका शेतकऱ्यानें कांहीं खंडी गहूं व कांहीं खंडी हरबरे साऱ्याबद्दल देण्याचा करार करून जमीनदारापासून एक शेत घेतलें; जेव्हां गहूं ५५ रुपये खंडी होते व हरबरे ३३ रुपये खंडी होते, तेव्हां जमीनदारास गव्हांचा आणि हरबऱ्यांचा सारखाच पैसा पोहोंचला; परंतु जेव्हां गहूं ६५ रुपये खंडी आणि हरबरे ४१ रुपये खंडी झाले, तेव्हां जमीनदारास १४० रुपये जास्त मिळूं लागले; तर किती खंडी गहूं व किती खंडी हरबरे देण्याचा त्याचा करार होता ?

उत्तर. ६ खंडी गहूं, आणि १० खंडी हरबरे.

२४. एका गाडीच्या पुढल्या चाकाचा परीघ **अ** फूट आहे आणि मागल्या चाकाचा **ब** फूट आहे; आतां मागल्या चाकाच्यापेक्षां पुढल्या चाकाच्या **न** प्रदक्षिणा जाजती झाल्या आहेत, तर पुढलें चाक आणि मागलें चाक ह्यांचे मधील अंतर हिशेबांत न घेतां ती गाडी किती लांब गेली असावी ?

उत्तर. $\frac{\text{अबन}}{\text{ब-अ}}$ फूट.

प्रकरण ४.

वर्गसमीकरणें.

(१६). ज्या समीकरणांत अव्यक्तपदाचा **दुसरा** घात म्हणजे वर्ग असतो त्यास **वर्ग** समीकरण म्हणतात. ज्या समीकरणांत अव्यक्तपदाचा **वर्ग** मात्र असतो त्यास एकाकी वर्गसमीकरण म्हणतात; परंतु ज्या समीकरणांत अव्यक्तपदाचा **वर्ग** आणि प्रथमघात हे असतात त्यास **संयुक्त** वर्गसमीकरण म्हणतात. जसें, $\text{क्ष}^{२} = ४$, आणि $\text{अय}^{२} - \text{अ} = \text{ब}$, हीं एकाकी वर्गसमीकरणें आहेत; आणि $\text{क्ष} + २\,\text{क्ष} = ८$, आणि $\text{य}^{२} - \text{अय} = \text{स}$, हीं संयुक्त वर्गसमीकरणें आहेत.

उदाहरण १. $७\,\text{क्ष}^{२} + १८ = ४\,\text{क्ष}^{२} + ४५०$ ह्या एकाकी वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काढ.

स्थळांतरानें, $७\,\text{क्ष}^{२} - ४\,\text{क्ष}^{२} = ४५० - १८$,

ह्मणजे $३\,\text{क्ष}^{२} = ४३२$,

$\therefore \text{क्ष}^{२} = \frac{४३२}{३} = १४४$.

आणि प्रत्येक बाजूचें वर्गमूळ काढल्यानें,

$\text{क्ष} = \pm १२$.

$\because + १२ \times + १२ = १४४$, आणि $- १२ \times - १२ = १४४$.

$\therefore$ क्षच्या किंमतीस $\pm$ चिन्ह लावलें आहे.

हीं पुढील एकाकी वर्गसमीकरणें सोडीव.

१. $\text{क्ष}^{२} = १४४$. उत्तर. $\text{क्ष} = \pm १२$.

२. $\text{क्ष}^{२} - ९ = १६$. उत्तर. $\text{क्ष} = \pm ५$.

३. $\frac{३\,\text{क्ष}^{२}}{४} - ५ = ७$. उत्तर. $\text{क्ष} = \pm ४$.

४. $२\sqrt{१-क्ष^{२}} = \sqrt{३}$ उत्तर. $क्ष = \pm \frac{१}{२}$.

५. $\frac{\sqrt{अ^{२}+क्ष^{२}}-क्ष}{क्ष} = \frac{१}{ब}$. उत्तर. $क्ष = \pm \frac{अब}{\sqrt{२ब+१}}$.

६. $\frac{७क्ष^{२}}{४} - \frac{४क्ष^{२}+५}{२} + \frac{२क्ष^{२}-१५}{४} = ०$.

उत्तर. $क्ष = \pm ५$.

७. $\frac{१}{२क्ष^{२}} + ७ = \frac{९}{४क्ष^{२}}$. उत्तर. $क्ष = \pm \frac{१}{२}$.

८. $३५ - \frac{क्ष^{२}+५०}{५} = क्ष^{२} - \frac{क्ष^{२}-१०}{३}$

उत्तर. $क्ष = \pm ५$.

संयुक्त वर्गसमीकरणें.

(१७). कोणत्याही संयुक्त समीकरणास $क्ष^{२} + पक्ष = क$, असें रूप देतां येईल. ह्यांत प आणि क हीं अक्षरें व्यक्त पदें किंवा संख्या दाखवितात. आणि ह्या समीकरणाच्या प्रत्येक बाजूंत $\overline{\frac{प}{२}}|^{२}$ हें पद मिळविलें तर,

$$क्ष^{२} + पक्ष + \left(\frac{प}{२}\right)^{२} = क + \left(\frac{प}{२}\right)^{२};$$

∴ प्रत्येक बाजूचें वर्गमूळ काढल्यानें,

$$क्ष + \frac{प}{२} = \pm\sqrt{\frac{प^{२}}{४} + क};\ \therefore क्ष = -\frac{प}{२} \pm \sqrt{\frac{प^{२}}{४} + क}.$$

ह्यावरून संयुक्त वर्गसमीकरणें सोडविण्याचा हा नियम सिद्ध होतो, कीं दुसऱ्या पदाच्या वेळा प्रकाशकाच्या अर्धाचा वर्ग करून तो प्रत्येक बाजूंत मिळवावा, आणि मग प्रत्येक बाजूचें वर्गमूळ काढावें.

उदाहरणें.

१. $क्ष^२ + ८ क्ष = २०$, वर्ग पुरा कर.

$$क्ष^२ + ८ क्ष + ४^२ = २० + १६ = ३६,$$ वर्गमूळ काढ.

$$क्ष + ४ = \pm ६,$$

$$\therefore क्ष = \pm ६ - ४ = + ६ - ४, \text{ किंवा } - ६ - ४ = २, \text{ किंवा } - १०.$$

२. $क्ष^२ - ५ क्ष = ६$, वर्ग पुरा कर.

$$क्ष^२ - ५ क्ष + \overline{\frac{५}{२}}|^२ = ६ + \frac{२५}{४} = \frac{२४}{४} + \frac{२५}{४} = \frac{४९}{४},$$

वर्गमूळ काढ.

$$क्ष - \frac{५}{२} = \pm \frac{७}{२},$$

$$\therefore क्ष = \frac{५ \pm ७}{२} = \frac{१२}{२}, \text{ किंवा } - \frac{२}{२} = ६, \text{ किंवा } - १.$$

ह्या उदाहरणांवरून असें दिसतें, कीं पहिल्या बाजूचें वर्ग-मूळ काढण्याची सुलभ रीति म्हटली म्हणजे हीच आहे कीं पहिल्या पदाचें आणि तिसऱ्या पदाचें वर्गमूळ काढावें, आणि त्या दोन्ही वर्गमूळांच्यामध्यें दुसऱ्या पदाचें चिन्ह मांडावें.

ह्यांवरूनच हें ही दिसतें, कीं वर्गसमीकरणांत अव्यक्त पदास दोन मूळें म्हणजे दोन किंमती असतात.

$क्ष^२ + पक्ष - क = ०$, ह्या समीकरणाचीं दोन मूळें दाखविण्यास अ आणि ब हीं अक्षरें घेतली, तर

$$अ = - \frac{प}{२} + \sqrt{\frac{प^२}{४} + क}, \quad ब = - \frac{प}{२} - \sqrt{\frac{प^२}{४} + क}.$$

$$\therefore अ + ब = - प, \quad अब = - \frac{प^२}{४} - \left(\frac{प^२}{४} + क\right);$$

ह्यावरून असें सिद्ध होतें, कीं दोन्ही मूळांची बेरीज दुसऱ्या पदाच्या वेळामकाशकाचें चिन्ह बदलून जो वेळामकाश-

क, त्याबरोबर असते, आणि मूळांचा गुणाकार शेवटल्या पदाबरोबर असतो. हे सिद्धांत सर्वप्रकारच्या घाताच्या समीकरणांस लागू आहेत.

जेव्हां $\sqrt{\frac{प^2}{४} + क} = ०$, तेव्हां मात्र वरलीं मुळें एकमेकाबरोबर असतात; कारण, तसें झाल्यानें

$अ = -\frac{प}{२}$ आणि $ब = -\frac{प}{२}$.

जेव्हां कचें चिन्ह धन आहे तेव्हां हीं दोन्ही मुळें वास्तविक आहेत, परंतु जेव्हां कचें चिन्ह ऋण आहे आणि जर $\frac{प^2}{४} > क$, तर मात्र तीं मुळें वास्तविक आहेत; कारण, जर $\frac{प^2}{४} < क$ आणि क पद ऋण आहे तर, $\frac{प^2}{४} - क$ हें ही पद ऋण होईल, आणि ऋणपदाचें वर्गमूळ नाहीं, म्हणून $\sqrt{\frac{प^2}{४} - क}$ हें केवळ कल्पित पद होईल.

$अक्ष^{२न} + बक्ष^{न} = क$, असल्या रूपांचीं समीकरणें म्हणजे ज्या समीकरणांच्या पहिल्या पदांतील अव्यक्तपदाचा घात दुसऱ्या पदांतील अव्यक्तपदाच्या घाताच्या दुप्पट असतो तीं समीकरणें संयुक्तवर्ग समीकरणांच्या रीतीनेंच सोडवतां येतात.

उदाहरणें.

१. $क्ष^४ - ७ क्ष^२ = ८$, वर्ग पुरा कर.

$\overline{क्ष^४ - ७क्ष^२ + \frac{७}{२}}\Big|^२ = ८ + \frac{४९}{४} = \frac{३२}{४} + \frac{४९}{४} = \frac{८१}{४}$, वर्गमूळ काढ.

$क्ष^२ - \frac{७}{२} = \pm\frac{९}{२}$, $क्ष^२ = \frac{+७\pm९}{२} = \frac{१६}{२}$, किंवा $-\frac{२}{२} = ८$, किंवा -१,

$\therefore$ क्ष$=\pm\sqrt{८}$, किंवा $\pm\sqrt{-१}=\pm२\sqrt{२}$, किंवा $\pm\sqrt{-१}$.

हें चतुर्घातसमीकरण आहे, म्हणून ह्यास जीं चार मुळें असतात तीं $+२\sqrt{२}$, $-२\sqrt{२}$, $+\sqrt{-१}$, आणि $-\sqrt{-१}$, हीं आहेत; ह्यांपैकीं पहिलीं दोन मुळें वास्तविक आहेत, आणि बाकीचीं दोन कल्पित आहेत.

$$२.\ \frac{१}{३}\sqrt{क्ष^{२}+\frac{क्ष}{२}+\frac{१७}{२}}+\frac{२क्ष^{२}+क्ष}{४}=\frac{६३}{४},$$

$$\frac{१}{३}\sqrt{क्ष^{२}+\frac{क्ष}{२}+\frac{१७}{२}}+\frac{क्ष^{२}}{२}+\frac{क्ष}{४}=\frac{६३}{४},\ \text{दोहोंनीं गूण.}$$

$$\frac{२}{३}\sqrt{क्ष^{२}+\frac{क्ष}{२}+\frac{१७}{२}}+क्ष^{२}+\frac{क्ष}{२}=\frac{६३}{२},\ \text{प्रत्येक बाजूंत } \frac{१७}{२} \text{ मिळीव,}$$

$$क्ष^{२}+\frac{क्ष}{२}+\frac{१७}{२}+\frac{२}{३}\sqrt{क्ष^{२}+\frac{क्ष}{२}+\frac{१७}{२}}=४०,$$

आतां $\because\left(क्ष^{२}+\frac{क्ष}{२}+\frac{१७}{२}\right)$ हा $\sqrt{क्ष^{२}+\frac{क्ष}{२}+\frac{१७}{२}}$ ह्याचा वर्ग आहे, $\therefore$ ह्या समीकरणास संयुक्त समीकरणांचें रूप आलें, आणि म्हणून वर्ग पुरा केल्यानें;

$$\left(क्ष^{२}+\frac{क्ष}{२}+\frac{१७}{२}\right)+\frac{२}{३}\sqrt{क्ष^{२}+\frac{क्ष}{२}+\frac{१७}{२}}+\frac{१}{३}\Bigg|^{२}=\frac{३६१}{९},$$

$$\sqrt{क्ष^{२}+\frac{क्ष}{२}+\frac{१७}{२}}+\frac{१}{३}=\pm\frac{१९}{३},$$

$$\sqrt{क्ष^{२}+\frac{क्ष}{२}+\frac{१७}{२}}=\frac{\pm१९-१}{३}=\frac{१८}{३}=६,\text{किंवा}-\frac{२०}{३};$$

ह्या समीकरणाच्या दोन्हीं बाजूंचे वर्ग केल्यानें,

$$क्ष^{२}+\frac{क्ष}{२}+\frac{१७}{२}=३६,\ \text{किंवा}\ \frac{४००}{९};$$

प्रथमतः ३६ ही किंमत धरल्यानें,

$$\text{क्ष}^{२} + \frac{१}{२}\,\text{क्ष} = ३६ - \frac{१७}{२} = \frac{७२-१७}{२} = \frac{५५}{२},$$

$$\text{क्ष}^{२} + \frac{१}{२}\text{क्ष} + \left(\frac{१}{४}\right)^{२} = \frac{५५}{२} + \frac{१}{१६} = \frac{४४०}{१६} + \frac{१}{१६} = \frac{४४१}{१६}.$$

$$\text{क्ष} + \frac{१}{४} = \pm\,\frac{२१}{४},$$

$$\therefore \text{क्ष} = \frac{\pm २१-१}{४} = \frac{२०}{४},\ \text{किंवा}\ -\frac{२२}{४} = ५,\ \text{किंवा}\ -\frac{११}{२}.$$

पुनः $\frac{४००}{९}$ ही किंमत धरल्यानें,

$$\text{क्ष}^{२} + \frac{१}{२}\text{क्ष} = \frac{४००}{९} - \frac{१७}{२} = \frac{८००-१५३}{१८} = \frac{६४७}{१८},$$

$$\text{क्ष}^{२} + \frac{१}{२}\text{क्ष} + \left(\frac{१}{४}\right)^{२} = \frac{६४७}{१८} + \frac{१}{१६} = \frac{५१७६}{१४४} + \frac{९}{१४४} = \frac{५१८५}{१४४},$$

$$\text{क्ष} + \frac{१}{४} = \pm\sqrt{\frac{५१८५}{१२}},\ \therefore\ \text{क्ष} = -\frac{१}{४} \pm \sqrt{\frac{५१८५}{१२}}.$$

$$\text{ह्याकरितां क्ष} = ५,\ \text{किंवा}\ -\frac{११}{२},\ \text{किंवा}\ \frac{-३\pm\sqrt{५१८५}}{१२}.$$

३. $\text{क्ष}^{३} - ३\,\text{क्ष} = २$, क्षनें गुण,

$$\text{क्ष}^{४} - ३\,\text{क्ष}^{२} = २\,\text{क्ष},\ \text{क्ष}^{४} - २\,\text{क्ष}^{२} = \text{क्ष}^{२} + २\,\text{क्ष},$$

$$\text{क्ष}^{४} - २\,\text{क्ष}^{२} + १ = \text{क्ष}^{२} + २\,\text{क्ष} + १,$$

$$\text{क्ष}^{२} - १ = \text{क्ष} + १,\ \text{क्ष}^{२} - \text{क्ष} = २,$$

$$\text{क्ष}^{२} - \text{क्ष} + \left(\frac{१}{२}\right)^{२} = २ + \frac{१}{४} = \frac{९}{४},\ \text{क्ष} - \frac{१}{२} = \pm\frac{३}{२},$$

$क्ष = \frac{१ \pm ३}{२} = \frac{४}{२}$, किंवा $- \frac{२}{२} = २$, किंवा $- १$.

४. $क्ष^{३} - २ क्ष = ४$, क्षनें गूण.

$क्ष^{४} - २ क्ष^{२} = ४ क्ष$, प्रत्येक बाजूंत ४ $क्ष^{२}$ मिळीव.

$$क्ष^{४} + २ क्ष^{२} = ४ क्ष^{२} + ४ क्ष,$$

$$क्ष^{४} + २ क्ष^{२} + १ = ४ क्ष^{२} + ४ क्ष + १,$$

$क्ष^{२} + १ = \pm (२ क्ष + १), क्ष^{२} = २ क्ष, \therefore क्ष = २.$

पुनः $क्ष^{२} + १ = - २ क्ष - १, क्ष^{२} + २ क्ष + १ = - १,$

$क्ष + १ = \pm \sqrt{-१}, \therefore क्ष = १ \pm \sqrt{-१}.$

५. $(क्ष^{२} - ५)^{२} = (क्ष - ३)^{२} + (क्ष + १)^{२}.$

$क्ष^{४} - १० क्ष^{२} + २५ = क्ष^{२} - ६ क्ष + ९ + क्ष^{२} + २ क्ष + १,$

$क्ष^{४} - १२ क्ष^{२} + ४ क्ष + १५ = ०,$

$क्ष^{४} - ८ क्ष^{२} = ४ क्ष^{२} - ४ क्ष - १५,$

$क्ष^{४} - ८ क्ष^{२} + १६ = ४ क्ष^{२} - ४ क्ष + १.$

$क्ष^{२} - ४ = \pm (२ क्ष - १), क्ष^{२} - २ क्ष = ३,$

$क्ष^{२} - २ क्ष + १ = ४, क्ष - १ = \pm २.$

$\therefore क्ष = १ \pm २ = ३$, किंवा $- १$.

पुनः $क्ष^{२} - ४ = - २ क्ष + १, क्ष^{२} + २ क्ष = ५,$

$क्ष^{२} + २ क्ष + १ = ६, क्ष + १ = \pm \sqrt{६}$

$$\therefore क्ष = \pm \sqrt{६} - १.$$

६. $क्ष^{३} - क्ष^{२} = ४$, ४ ह्यांनीं गूण.

$४ क्ष^{३} = ४ क्ष^{२} + १६$, प्रत्येक बाजूंत $क्ष^{४} + ४ क्ष^{२}$ हे मिळीव.

$क्ष^{४} + ४ क्ष^{३} + ४ क्ष^{२} = क्ष^{४} + ८ क्ष^{२} + १६$, वर्गमूळ काढ.

$क्ष^{२} + २ क्ष = क्ष^{२} + ४,$

$२ क्ष = ४, \therefore क्ष = २.$

७. $(\text{क्ष} - १)\sqrt{२\text{क्ष} - \text{क्ष}^२} = \frac{१}{२}$, वर्ग कर.

$$(\text{क्ष}^२ - २\,\text{क्ष} + १)(२\,\text{क्ष} - \text{क्ष}^२) = \tfrac{१}{४},$$

$$-\text{क्ष}^४ + ४\,\text{क्ष}^३ - ५\,\text{क्ष}^२ + २\,\text{क्ष} = \tfrac{१}{४},$$

$$\text{क्ष}^४ - १६\,\text{क्ष}^३ + २०\,\text{क्ष}^२ - ८\,\text{क्ष} = -१,$$

$(२\,\text{क्ष}^२ - ४\,\text{क्ष})^२ + २(२\,\text{क्ष}^२ - ४\,\text{क्ष}) + १ = ०$, वर्गमूळ काढ.

$$२\,\text{क्ष}^२ - ४\,\text{क्ष} + १ = ०,\ \text{क्ष}^२ - २\,\text{क्ष} = -\tfrac{१}{२},$$

$$\text{क्ष}^२ - २\,\text{क्ष} + १ = १ - \frac{१}{२} = \frac{१}{२},\ \text{क्ष} - १ = \pm\sqrt{\frac{१}{२}},$$

$$\therefore \text{क्ष} = १ \pm \frac{१}{\sqrt{२}} = \frac{\sqrt{२} \pm १}{\sqrt{२}}.$$

८. $\text{क्ष} - २\sqrt{\text{क्ष}+२} = १ + \sqrt[४]{\text{क्ष}^३ - ३\text{क्ष} + २}.$

$$(\text{क्ष} - १) - २\sqrt{\text{क्ष}+२} = \sqrt[४]{(\text{क्ष}-१)^२(\text{क्ष}+२)}$$

$$= \sqrt{\text{क्ष}-१}.\ \sqrt[४]{\text{क्ष}+२},$$

$$(\text{क्ष} - १) - \sqrt{\text{क्ष}-१}.\sqrt[४]{\text{क्ष}+२} = २\sqrt{\text{क्ष}+२},$$

$$(\text{क्ष} - १) - \sqrt[४]{\text{क्ष}+२}.\sqrt{\text{क्ष}-१} + \frac{१}{४}\sqrt{\text{क्ष}+२} =$$

$$२\sqrt{\text{क्ष}+२} + \frac{१}{४}\sqrt{\text{क्ष}+२} = \frac{९}{४}\sqrt{\text{क्ष}+२},$$

$$\sqrt{\text{क्ष}-१} - \frac{१}{२}\sqrt[४]{\text{क्ष}+२} = \pm\frac{३}{२}\sqrt[४]{\text{क्ष}+२},$$

$$\sqrt{\text{क्ष}-१} = २\sqrt[४]{\text{क्ष}+२},\ \text{क्ष} - १ = ४\sqrt{\text{क्ष}+२},$$

$$\text{क्ष}^२ - २\,\text{क्ष} + १ = १६\,\text{क्ष} + ३२,\ \text{क्ष}^२ - १८\,\text{क्ष} = ३१,$$

$$\text{क्ष}^२ - १८\,\text{क्ष} + ९^२ = ८१ + ३१ = ११२ = १६ \times ७,$$

$$\text{क्ष} - ९ = \pm ४\sqrt{७},\ \therefore \text{क्ष} = ९ \pm ४\sqrt{७}.$$

पुनः $\sqrt{क्ष-१} = -\sqrt[४]{क्ष+२}$,

$$क्ष^२ - २ क्ष + १ = क्ष + २,\ क्ष^२ - ३ क्ष = १;$$

$$क्ष^२ - ३ क्ष + \left(\frac{३}{२}\right)^२ = १ + \frac{९}{४} = \frac{१३}{४},\ \therefore क्ष - \frac{३}{२} = \pm \frac{\sqrt{१३}}{२},$$

$$\therefore क्ष = \frac{३\pm\sqrt{१३}}{२} = \frac{१}{२}(३ \pm \sqrt{१३}).$$

९. $\sqrt{अ^२ - क्ष^२} + क्ष\sqrt{अ^२ - १} = अ^२\sqrt{१-क्ष^२}$.

$$अ^२-क्ष^२+क्ष^२(अ^२-१)+२क्ष\{(अ^२-क्ष^२)(अ^२-१)\}^{\frac{१}{२}}=अ^४(१-क्ष^२),$$

$$अ^२-क्ष^२+अ^२क्ष^२-क्ष^२+२क्ष(अ^४-अ^२क्ष^२-अ^२+क्ष^२)^{\frac{१}{२}}=अ^४-अ^४क्ष^२,$$

$$अ^४-अ^२क्ष^२-अ^२+क्ष^२-२क्ष\sqrt{अ^४-अ^२क्ष^२-अ^२+क्ष^२}+क्ष^२=अ^२क्ष^२,$$

$$\sqrt{अ^४-अ^२क्ष^२-अ^२+क्ष^२}=अ^२क्ष+क्ष,$$

$$अ^४-अ^२क्ष^२-अ^२+क्ष^२=क्ष^२अ^४+२अ^२क्ष^२+क्ष^२,$$

$$अ^४-अ^२=अ^४क्ष^२+३अ^२क्ष^२,\ अ^२-१=अ^२क्ष^२+३क्ष^२,$$

$$(अ^२+३)क्ष^२ = अ^२ - १,\ क्ष^२ = \frac{अ^२-१}{अ^२+३},\ \therefore क्ष = \left(\frac{अ^२-१}{अ^२+३}\right)^{\frac{१}{२}}.$$

१०. $\sqrt{क्ष-\frac{१}{क्ष}} + \sqrt{१-\frac{१}{क्ष}} = क्ष$.

$$\sqrt{१-\frac{१}{क्ष}} = क्ष - \sqrt{क्ष-\frac{१}{क्ष}},$$

$$१-\frac{१}{क्ष} = क्ष^२ - २क्ष\sqrt{क्ष-\frac{१}{क्ष}} + क्ष - \frac{१}{क्ष},$$

$$क्ष^२ - १ - २क्ष\frac{\sqrt{क्ष^२-१}}{\sqrt{क्ष}} + क्ष = ०,$$

$$क्ष^{२}-१-२क्ष^{\frac{१}{२}}\sqrt{क्ष^{२}-१}+क्ष=०,$$

$$\sqrt{क्ष^{२}-१}-क्ष^{\frac{१}{२}}=०, \sqrt{क्ष^{२}-१}=क्ष^{\frac{१}{२}}, क्ष^{२}-१=क्ष,$$

$$क्ष^{२}-क्ष=१, \left.क्ष^{२}-क्ष+\frac{१}{२}\right|^{२}=१+\frac{१}{४}=\frac{५}{४},$$

$$क्ष-\frac{१}{२}=\pm\frac{\sqrt{५}}{२}, \therefore क्ष=\frac{१\pm\sqrt{५}}{२}.$$

११. $$\left(\frac{१+क्ष}{१-क्ष}\right)^{\frac{१}{४}}+\sqrt{\frac{१-अ}{१+अ}}.\sqrt[४]{\frac{१-क्ष}{१+क्ष}}=२\sqrt[४]{\frac{१-अ}{१+अ}}.$$

$$\frac{\sqrt[४]{१+क्ष}}{\sqrt[४]{१-क्ष}}+\sqrt{\frac{१-अ}{१+अ}}.\frac{\sqrt[४]{१-क्ष}}{\sqrt[४]{१+क्ष}}=२\sqrt[४]{\frac{१-अ}{१+अ}},$$

$$\frac{\sqrt{१+क्ष}}{\sqrt{१-क्ष}}+\sqrt{\frac{१-अ}{१+अ}}=२\sqrt[४]{\frac{१-अ}{१+अ}}.\frac{\sqrt[४]{१+क्ष}}{\sqrt[४]{१-क्ष}}, \because \times\frac{\sqrt[४]{१+क्ष}}{\sqrt[४]{१-क्ष}}.$$

$$\sqrt{\frac{१+क्ष}{१-क्ष}}-२\sqrt[४]{\frac{१-अ}{१+अ}}.\sqrt[४]{\frac{१+क्ष}{१-क्ष}}+\sqrt{\frac{१-अ}{१+अ}}=०,$$

$$\sqrt[४]{\frac{१+क्ष}{१-क्ष}}-\sqrt[४]{\frac{१-अ}{१+अ}}=०,$$

$$\sqrt[४]{\frac{१+क्ष}{१-क्ष}}=\sqrt[४]{\frac{१-अ}{१+अ}},$$

$$\frac{१+क्ष}{१-क्ष}=\frac{१-अ}{१+अ}, \therefore क्ष=-अ.$$

१२. $$\frac{१+क्ष^{४}}{(१+क्ष)^{४}}=\frac{१}{२}.$$

$$२+२क्ष^{४}=१+४क्ष+६क्ष^{२}+४क्ष^{३}+क्ष^{४},$$

$\text{क्ष}^{४} - ४\,\text{क्ष}^{३} - ६\,\text{क्ष}^{२} - ४\,\text{क्ष} + १ = ०$, $\text{क्ष}^{२}$ ह्याने भाग.

$$\text{क्ष}^{२} - ४\,\text{क्ष} - ६ - \frac{४}{\text{क्ष}} + \frac{१}{\text{क्ष}^{२}} = ०,$$

$\text{क्ष}^{२} + \frac{१}{\text{क्ष}^{२}} - ४\,\text{क्ष} - \frac{४}{\text{क्ष}} = ६$, प्रत्येक बाजूंत २ मिळीव.

$$\text{क्ष}^{२} + २ + \frac{१}{\text{क्ष}^{२}} - ४\left(\text{क्ष} + \frac{१}{\text{क्ष}}\right) = ८,$$

$$\left(\text{क्ष} + \frac{१}{\text{क्ष}}\right)^{२} - ४\left(\text{क्ष} + \frac{१}{\text{क्ष}}\right) + २^{२} = ८ + ४ = १२,$$

$$\text{क्ष} + \frac{१}{\text{क्ष}} - २ = \pm २\sqrt{३},$$

$$\text{क्ष}^{२} + १ - २\,\text{क्ष} = \pm २\sqrt{३}\cdot\text{क्ष},$$

$$\text{क्ष}^{२} - (२ \pm २\sqrt{३})\,\text{क्ष} = -१,$$

$$\text{क्ष}^{२} - २(१ \pm \sqrt{३})\,\text{क्ष} + (१ \pm \sqrt{३})^{२} = १ \pm २\sqrt{३} + ३ - १$$
$$= ३ \pm २\sqrt{३},$$

$$\text{क्ष} - (१ \pm \sqrt{३}) = \pm\sqrt{३ \pm २\sqrt{३}},$$

$$\therefore\ \text{क्ष} = १ \pm \sqrt{३} \pm \sqrt{३ \pm २\sqrt{३}}.$$

१३. $२\,\text{क्ष}^{३} - \text{क्ष}^{२} = १$, $२\,\text{क्ष} + १$ ह्याने गूण.

$$४\,\text{क्ष}^{४} - \text{क्ष}^{२} = २\,\text{क्ष} + १,\ ४\,\text{क्ष}^{४} = \text{क्ष}^{२} + २\,\text{क्ष} + १,$$

$$२\,\text{क्ष}^{२} = \text{क्ष} + १,\ \text{क्ष}^{२} - \frac{\text{क्ष}}{२} = \frac{१}{२},$$

$$\text{क्ष}^{२} - \frac{\text{क्ष}}{२} + \frac{१}{१६} = \frac{१}{२} + \frac{१}{१६} = \frac{८}{१६} + \frac{१}{१६} = \frac{९}{१६}.$$

$$\text{क्ष} - \frac{१}{४} = \pm\frac{३}{४},\ \therefore\ \text{क्ष} = \frac{१ \pm ३}{४} = १,\ \text{किंवा}\ -\frac{१}{२}.$$

अक्ष^2 ± बक्ष = क, ह्या प्रकारचें कोणतेंही समीकरण असल्यास त्यास ही रीति लागू पडेल; म्हणजे, अक्ष ∓ ब ह्यांनीं गुणून तें समीकरण सोडवितां येईल; येथें जेव्हां क्षच्या वेळाप्रकाशकाचें चिन्ह धन असेल, तेव्हां वरील चिन्ह घ्यावें, आणि ऋण असेल तेव्हां खालचें चिन्ह घ्यावें.

परंतु ह्यारीतीनें समीकरणांत नवा गुणक शिरतो, ह्यास्तव त्या गुणकाची किंमत ० धरूंनये. कारण, ० किंमत धरली असतां क्षस जी किंमत येईल ती विवक्षित समीकरणांत जमणार नाहीं.

हीं पुढील संयुक्त वर्ग समीकरणें सोडीव.

१. क्ष^2 − ८ क्ष = ९, ह्यांत क्ष च्या किंमती काढ.
उत्तर. क्ष = ९, किंवा − १.

२. क्ष^2 + १२ क्ष − १६ = ९२. उत्तर. क्ष = ६, किंवा − १८.

३. क्ष^2 − ३ क्ष = १०. उत्तर. क्ष = ५, किंवा − २.

४. क्ष^2 − क्ष + ३ = ४५. उत्तर. क्ष = ७, किंवा − ६.

५. ५ क्ष^2 + क्ष = ४. उत्तर. क्ष = $\frac{\text{४}}{\text{५}}$, किंवा − १.

६. २ क्ष^2 − क्ष = २१. उत्तर. क्ष = $\frac{\text{७}}{\text{२}}$, किंवा − ३.

७. ५ क्ष^2 + ६ क्ष = ६३. उत्तर. क्ष = ३, किंवा − $\frac{\text{२१}}{\text{५}}$.

८. क्ष − १ = − $\frac{\text{१}}{\text{क्ष}}$. उत्तर. क्ष = $\frac{\text{१} \pm \sqrt{-\text{३}}}{\text{२}}$.

९. (क्ष − १२) (क्ष + २) = ० उत्तर. क्ष = १२ किंवा − २.

१०. ३ क्ष^2 − १४ क्ष + १५ = ०. उत्तर. क्ष = ३, किंवा १ $\frac{\text{२}}{\text{३}}$.

११. २ क्ष^2 − ११ क्ष = २१. उत्तर. क्ष = ७, किंवा − १ $\frac{\text{१}}{\text{२}}$.

१२. अक्ष^2 − बक्ष = क. उत्तर. क्ष = $\frac{\text{ब} \pm \sqrt{(\text{ब}^2 + \text{४अक})}}{\text{२अ}}$.

१३. $\text{४ क्ष} - \frac{\text{१४ − क्ष}}{\text{क्ष+१}} = \text{१४}$. उत्तर. क्ष=४, किंवा− $\frac{\text{७}}{\text{४}}$.

१४. $\text{क्ष}^{\text{२}} - \text{४ अक्ष} = -\text{ ७ अ}^{\text{२}}$. उत्तर. $\text{क्ष}=(\text{२}\pm\sqrt{-\text{३}})\text{अ}$.

१५. $\frac{\text{१०}}{\text{क्ष}} - \frac{\text{१४ − २ क्ष}}{\text{क्ष}^{\text{२}}} = \frac{\text{२२}}{\text{९}}$. उत्तर. क्ष=३, किंवा $\frac{\text{२१}}{\text{११}}$.

१६. $\text{क्ष} + \sqrt{\text{५ क्ष + १०}}$* $= \text{८}$. उत्तर, क्ष =१८, किंवा ३.

१७. $\frac{\text{३ क्ष + ४}}{\text{५}} - \frac{\text{३० − २ क्ष}}{\text{क्ष−६}} = \frac{\text{७ क्ष − १४}}{\text{१०}}$.

उत्तर. क्ष = ३६, किंवा १२.

१८. $\text{क्ष} + \sqrt{\text{१० क्ष + ६}} = \text{९}$. उत्तर. क्ष = २५, किंवा ३.

१९. $(\text{क्ष+२})^{\text{२}} = \text{२ क्ष}^{\text{२}} + \text{८}$. उत्तर. क्ष = २.

२०. $\frac{\text{क्ष + २२}}{\text{३}} - \frac{\text{९ क्ष − ६}}{\text{२}} = \frac{\text{४}}{\text{क्ष}}$.

उत्तर. क्ष = २, किंवा $\frac{\text{१२}}{\text{२५}}$.

२१. $\frac{\text{२ क्ष}}{\text{९}} - \text{२} = \frac{\text{३ क्ष − १६}}{\text{१८}} - \frac{\text{४ क्ष − ३}}{\text{४ क्ष + ३}}$.

उत्तर. क्ष = ६, किंवा − $\text{४}\frac{\text{३}}{\text{४}}$.

२२. $\frac{\text{क्ष − ३}}{\text{क्ष + ५}} - \frac{\text{क्ष + ४}}{\text{क्ष − ७}} = \text{२}\frac{\text{७}}{\text{९}}$.

उत्तर. क्ष = ४, किंवा $\text{८}\frac{\text{२१}}{\text{२५}}$.

---

* हें उदाहरण सोडवितांना $\sqrt{\text{५क्ष+१०}}$ = ५, किंवा − १० येतात, ∴ १८ उत्तरानें ताळा पाहातांना $\sqrt{\text{५क्ष+१०}}$ = −१० घ्यावे, आणि ३ उत्तरानें ताळा पाहातांना $\sqrt{\text{५क्ष+१०}}$ = ३ घ्यावे. हीच गोष्ट, पुढील कितीएक उदाहरणांचा ताळा पाहातांना, लक्षांत ठेवावी.

२३. $\text{क्ष}^{२} - (\text{अ} + \text{ब})\,\text{क्ष} + \text{अ}\,\text{ब} = ०$.

उत्तर. क्ष = अ, किंवा ब.

२४. $४\,\text{क्ष} + ४\sqrt{\text{क्ष}+२} = ७$.

उत्तर. $\text{क्ष} = ४\frac{१}{४}$, किंवा $\frac{१}{४}$.

२५. $\text{क्ष} = \dfrac{\text{क्ष} - ९}{\text{क्ष}^{\frac{१}{२}} + ३} + १५$.*

उत्तर. $\text{क्ष} = \{(-३)^{२} = ९\}$ किंवा $\{(+४)^{२} = १६\}$.

२६. $\sqrt{\text{क्ष}+६} + \sqrt{\text{क्ष}+२} = ३\sqrt{\text{क्ष}}$.

उत्तर. $\text{क्ष} = \dfrac{९ \pm \sqrt{७६}}{५}$.

२७. $\dfrac{\sqrt{४\text{क्ष}+२०}}{४+\sqrt{\text{क्ष}}} = \dfrac{४-\sqrt{\text{क्ष}}}{\sqrt{\text{क्ष}}}$.

उत्तर. क्ष = ४ , किंवा $-\dfrac{६४}{३}$.

२८. $\sqrt{\text{क्ष}} + २ = \sqrt{७+२\text{क्ष}}$.

उत्तर. क्ष = ९, किंवा १.

२९. $\dfrac{\text{क्ष}}{\text{क्ष}+१} + \dfrac{\text{क्ष}+१}{\text{क्ष}} = २\frac{१}{६}$.

उत्तर. क्ष = २, किंवा -३.

---

* ∵ $\text{अ}^{२}$ हा + अचा किंवा - अचा वर्ग आहे, हें जेव्हां माहीत नाहीं तेव्हां $\text{अ}^{२}$ ह्याचें वर्ग मूळ ± अ घ्यावें, पण जेव्हां $\text{अ}^{२}$ हा + अचा वर्ग असें माहीत आहे तेव्हां $\text{अ}^{२}$चें वर्गमूळ + अ घ्यावें आणि जेव्हां $\text{अ}^{२}$ हा - अचा वर्ग असें माहीत आहे तेव्हां $\text{अ}^{२}$चें वर्गमूळ - अ घ्यावें; असेंच वरील उत्तरांत ९ आणि १६ हे अनुक्रमें -३ आणि +४ ह्यांचे वर्ग आहेत, ह्मणून ९ आणि १६ ह्यांचीं वर्गमूळें -३ आणि +४ घ्यावीं. ह्या गोष्टीकडे लोक दुर्लक्ष्य करितात तें न करावें, ह्मणून वरील उत्तरांत $(-३)^{२} = ९$ आणि $(+४)^{२} = १६$, असें लिहिलें आहे. हीच गोष्ट पुढील कितीएक उदाहरणास लागू आहे.

३०. $\frac{४क्ष^{२}}{३} = \frac{क्ष}{३} + ११$. उत्तर. $क्ष = ३$, किंवा $-२\frac{३}{४}$.

३१. $\sqrt{क्ष - अ} + \sqrt{क्ष + ब} = २\sqrt{क्ष}$.

उत्तर. $क्ष = \frac{(अ + ब)^{२}}{८(ब - अ)}$.

३२. $\frac{\sqrt{अ^{२} क्ष + ब}}{अ + \sqrt{क्ष}} = \frac{अ - \sqrt{क्ष}}{\sqrt{क्ष}}$.

उत्तर. $क्ष = \frac{-(२अ^{२}+ब) \pm \sqrt{४अ^{४}+४अ^{२}ब + ब^{२}}}{२(अ^{२} - १)}$.

३३. $\frac{क्ष + ४}{३} - \frac{४क्ष + ७}{९} = \frac{७-क्ष}{क्ष-३} - १$.

उत्तर. $क्ष = २१$, किंवा ५.

३४. $\sqrt{५अ + क्ष} + \sqrt{५अ - क्ष} = \frac{१२अ}{\sqrt{५अ+क्ष}}$.

उत्तर. $क्ष = ४अ$, किंवा $३अ$.

३५. $क्ष^{४} - ८क्ष^{२} = ९$.

उत्तर. $क्ष = \pm ३$, किंवा $+\sqrt{-१}$.

३६. $क्ष^{६} - ४क्ष^{३} = ३२$. उत्तर. $क्ष = २$. किंवा $\sqrt[३]{-४}$.

३७. $\frac{नक्ष + ब}{\sqrt{क्ष}} = \frac{नअ + ब}{\sqrt{अ}}$.

उत्तर. $क्ष = अ$, किंवा $\frac{ब^{२}}{अन^{२}}$.

३८. $क्ष^{४} - २क्ष^{२} = ३$. उत्तर $क्ष = \pm\sqrt{३}$, किंवा $\pm\sqrt{-१}$.

३९. $\sqrt{४अ + क्ष} + \sqrt{अ + क्ष} = २\sqrt{२अ + क्ष}$.

उत्तर. $क्ष = -\frac{७}{८}अ$.

४०. $क्ष^{३} - क्ष^{\frac{३}{२}} = ५६$. उत्तर. $क्ष = ४$, किंवा $\sqrt[३]{४९}$.

४१. $\text{क्ष} + ५ = \sqrt{\text{क्ष} + ५} + ६.$

उत्तर. $\text{क्ष} = ४$, किंवा $- १.$

४२. $\sqrt{(२\,\text{क्ष} + १)} + २\sqrt{\text{क्ष}} = \frac{२१}{\sqrt{(२\,\text{क्ष} + १)}}.$

उत्तर. $\text{क्ष} = ४$, किंवा $- २५.$

४३. $\text{क्ष}^{६} + २०\,\text{क्ष}^{३} = ६९.$ उत्तर. $\text{क्ष} = \sqrt[३]{३}$, किंवा $\sqrt[३]{-२३}.$

४४. $\frac{\text{अ} + \text{क्ष}}{\sqrt{\text{अ} - \text{क्ष}}} + \frac{\text{अ} - \text{क्ष}}{\sqrt{\text{अ} - \text{क्ष}}} = २\sqrt{\text{अ}}.$

उत्तर. $\text{क्ष} = \pm\,\text{अ}\sqrt{८\sqrt{२} - ११}.$

४५. $\text{क्ष}\sqrt{\frac{\text{अ}}{\text{क्ष}} - १} = \sqrt{\text{क्ष}^{२} - \text{ब}^{२}}.$

उत्तर. $\text{क्ष} = \frac{१}{४}\left(\text{अ} \pm \sqrt{\text{अ}^{२} + ८\text{ब}^{२}}\right).$

४६. $(\text{अ} + १)(\text{क्ष} - १)^{२} = २(\text{क्ष}^{२} + १).$

उत्तर. $\text{क्ष} = \frac{\sqrt{\text{अ}} + १}{\sqrt{\text{अ}} - १}$, किंवा $\frac{\sqrt{\text{अ}} - १}{\sqrt{\text{अ}} + १}$

४७. $\text{क्ष}^{२} - ७\,\text{क्ष} + \sqrt{\text{क्ष}^{२} - ७\,\text{क्ष} + १८} = २४.$

उत्तर. $\text{क्ष} = ९$, किंवा $- २$, किंवा $\frac{७ \pm \sqrt{१७३}}{२}.$

४८. $\left(\frac{१}{\text{क्ष}}\right)^{३} + \text{अ} = \left(\frac{१}{\text{क्ष}}\right)^{\frac{३}{२}}.$

उत्तर. $\text{क्ष} = \left\{\frac{१ \mp \sqrt{१ - ४\,\text{अ}}}{२\,\text{अ}}\right\}^{\frac{२}{३}}.$

४९. $५^{\text{क्ष}} + \frac{१२५}{५^{\text{क्ष}}} = ३०.$ उत्तर $\text{क्ष} = २$, किंवा १,

५०. $\sqrt{अ - क्ष} + \sqrt{अ + क्ष} = \frac{ब}{\sqrt{अ + क्ष}}$.

उत्तर. $क्ष = \frac{1}{2}(ब - अ \pm \sqrt{अ^2 + २अब - ब^2})$.

५१. $क्ष^2 - २क्ष + ६\sqrt{क्ष^2 - २क्ष + ५} = ११$.

उत्तर. क्ष = १, किंवा $१ \pm २\sqrt{१५}$.

५२. $क्ष^2(क्ष - १) = ८(क्ष + २)^2$.

उत्तर. $क्ष = \frac{\pm\sqrt{-७} - ३}{२}$

५३. $क्ष^4 - २क्ष^3 + क्ष = अ$.

उत्तर. $क्ष = \frac{१ \pm \sqrt{३ \pm \sqrt{४अ + १}}}{२}$.

५४. $\frac{क्ष}{\sqrt{क्ष} + \sqrt{(अ - क्ष)}} + \frac{क्ष}{\sqrt{क्ष} - \sqrt{(अ - क्ष)}} = \frac{ब}{\sqrt{क्ष}}$.

उत्तर. $क्ष = \frac{ब \pm \sqrt{(ब^2 - २अब)}}{२}$.

५५. $क्ष^{-३} + \frac{१}{क्ष\sqrt{क्ष}} = २$.

उत्तर. क्ष = १, किंवा $\frac{\sqrt[3]{२}}{२}$.

५६. $अक्ष - ब^2 = क्ष^2 - २ब\sqrt{अ^2 - अक्ष + क्ष^2}$.

उत्तर. $क्ष = \frac{अ \pm \sqrt{अ^2 \pm ८अब + ४ब^2}}{२}$.

५७. $९क्ष - ३क्ष^2 + ४\sqrt{क्ष^2 - ३क्ष + ५} = ११$.

उत्तर. $क्ष = \frac{३ \pm \sqrt{५}}{२}$.

५८. $\sqrt{\frac{\text{अ}}{\text{क्ष}}} + \sqrt{\frac{\text{क्ष}}{\text{अ}}} = \frac{\sqrt{\text{२अक्ष} - \text{क्ष}^{२}}}{\text{क्ष}}$.

उत्तर. $\text{क्ष} = -\frac{१}{२}\,\text{अ}\,(३ \mp \sqrt{१३})$.

५९. $\text{क्ष}^{२} + \frac{१}{\text{क्ष}^{२}} + \text{क्ष} + \frac{१}{\text{क्ष}} = ४$.

उत्तर. $\text{क्ष} = १$, किंवा $\frac{-३ \pm \sqrt{५}}{२}$.

६०. $\text{क्ष} = \frac{१२ + ८\text{क्ष}^{\frac{१}{२}}}{\text{क्ष} - ५}$

उत्तर. $\text{क्ष} = ९$, किंवा ४, किंवा $\frac{-३ \mp \sqrt{-७}}{२}$.

६१. $\sqrt{\text{क्ष}^{२} + १} - \sqrt{\text{क्ष}^{२} - १} = \frac{\text{क्ष}}{\sqrt{\text{क्ष}^{४} - १}}$.

उत्तर. $\text{क्ष} = \pm\sqrt{\frac{२}{\sqrt{३}}}$.

६२. $\text{क्ष}^{३} - ६\,\text{क्ष} - ४ = ५$.

उत्तर. $\text{क्ष} = ३$, किंवा $\frac{-३ \pm \sqrt{-३}}{२}$.

६३. $३\,\text{क्ष}^{२} = \frac{२}{\text{क्ष}} + \frac{१३}{३}$.

उत्तर. $\text{क्ष} = -\frac{२}{३}$, किंवा $\frac{१ \pm \sqrt{१०}}{३}$.

६४. $\text{अक्ष} + २\sqrt{\text{न}^{२}\text{क्ष} + \text{नअक्ष}^{२}} = (३\,\text{क्ष} - १)\,\text{न}$.

उत्तर. $\text{क्ष} = \frac{\text{न}}{\text{न} - \text{अ}}$, किंवा $\frac{\text{न}}{९\text{न} - \text{अ}}$.

६५. $२\left(\sqrt{१-क्ष}+१\right) = \frac{क्ष}{\sqrt{१+क्ष}-१}$.

उत्तर. $क्ष = \frac{२४}{२५}$, किंवा ०.

६६. $\left(क्ष - \frac{अब}{क्ष}\right)^{२} = \frac{अ^{२}+अब}{२}\cdot\left(\frac{अ^{२}}{क्ष^{२}} + १\right)$.

उत्तर. $क्ष = \sqrt{अ^{२}+२अब}$, किंवा $\sqrt{\frac{अब-अ^{२}}{२}}$.

६७. $(क्ष - ब^{२न}) + २ब^{न}क्ष = ब^{न+१}(२ + ब^{न-१}) + २(क्ष - ब^{न+१})$.

उत्तर. $क्ष = २ब$.

६८. $क्ष^{४} = -१$.

उत्तर. $क्ष = \sqrt[४]{-१}$, किंवा $\frac{\pm१\pm\sqrt{-१}}{\sqrt{२}}$

६९. $क्ष^{४न} - २क्ष^{३न} + क्ष^{न} = ६$.

उत्तर. $क्ष = \sqrt[न]{\frac{१}{२}\pm\frac{१}{२}\sqrt{१३}}$, किंवा $\sqrt[न]{\frac{१}{२}\pm\frac{१}{२}\sqrt{-७}}$.

७०. $\left\{(क्ष - २)^{२} - क्ष\right\}^{२} - ९० + क्ष = (क्ष - २)^{२}$.

उत्तर. $क्ष = ६$, किंवा -१, किंवा $\frac{५\pm३\sqrt{-३}}{२}$.

७१. $\sqrt[म]{(१+क्ष)^{२}} - \sqrt[म]{(१-क्ष)^{२}} = \sqrt[म]{१-क्ष^{२}}$.

उत्तर. $क्ष = \frac{(१\pm\sqrt{५})^{म} - २^{म}}{(१\pm\sqrt{५})^{म}+२^{म}}$.

७२. $८क्ष^{४} + ४क्ष^{३} - १८क्ष^{२} + ११क्ष - २ = ०$.

उत्तर. $क्ष = \frac{१}{२}$, किंवा -२.

७३. $४\,क्ष - २० - ५\left(क्ष + \frac{३}{क्ष}\right) = -\frac{३६}{क्ष^{२}}$.

उत्तर. $क्ष = ३, १,$ किंवा $\frac{-११\pm\sqrt{-७१}}{८}$.

७४. $\frac{२}{(क्ष-४)^{\frac{३}{२}}} + \frac{(क्ष-४)^{\frac{१}{२}}}{२} = \frac{१७}{४\,(क्ष-४)^{\frac{१}{२}}}$.

उत्तर. $क्ष = १२,$ किंवा $४\frac{१}{२}$.

७५. $क्ष^{४} + ४\,क्ष^{३} + ३\,क्ष^{२} + ४\,क्ष + १ = ०$.

उत्तर. $क्ष = \frac{-२\pm\sqrt{३}\pm\sqrt{(३\mp४\sqrt{३})}}{२}$.

७६. $(अ^{२म} + १)(क्ष^{\frac{१}{२}} - १)^{२} = २\,(क्ष + १)$.

उत्तर. $क्ष = \left(\frac{अ^{म}\pm१}{अ^{म}\mp१}\right)^{२}$

७७. $(क्ष^{२} - ९)^{२} - ३ = ११\,(क्ष^{२} - २)$.

उत्तर. $क्ष = \pm ५,$ किंवा ± २.

७८. $\sqrt{क्ष+\sqrt{२क्ष-१}} - \sqrt{क्ष-\sqrt{२क्ष-१}} = \frac{३}{५}\sqrt{\frac{१०क्ष}{क्ष+\sqrt{२क्ष-१}}}$.

उत्तर. $क्ष = \frac{५}{२},$ किंवा $\frac{५}{८}$.

७९. $\frac{अ-\sqrt{२अक्ष-क्ष^{२}}}{अ+\sqrt{२अक्ष-क्ष^{२}}} = \frac{क्ष}{अ-क्ष}$.

उत्तर. $क्ष = अ,$ किंवा $\frac{अ}{५}$.

८०. $\frac{क्ष^{२}-१८}{क्ष-१२} = \frac{४}{क्ष^{२}}$.

उत्तर. $क्ष = ४,$ किंवा $-२,$ किंवा $-१\pm\sqrt{७}$.

८१. $\text{क्ष} + ४ + \left(\frac{\text{क्ष}+४}{\text{क्ष}-४}\right)^{\frac{१}{२}} = \frac{१२}{\text{क्ष}-४}$.

उत्तर. $\text{क्ष} = \pm ५$, किंवा $\pm ४\sqrt{२}$.

८२. $(\text{क्ष} + ११९)^{\frac{१}{३}} + (७० - \text{क्ष})^{\frac{१}{३}} = ९$.

उत्तर. $\text{क्ष} = ६$.

८३. $\text{क्ष}^४ + \text{क्ष}^३ - ४\,\text{क्ष}^२ + \text{क्ष} + १ = ०$.

उत्तर. $\text{क्ष} = १$, किंवा $\frac{-३\pm\sqrt{५}}{२}$.

८४. $२\,\text{क्ष}^२ + \sqrt{\text{क्ष}^२+९} = \text{क्ष}^४ - ९$.

उत्तर. $\text{क्ष} = \sqrt{\frac{३ \pm \sqrt{४१}}{२}}$, किंवा $\sqrt{\frac{१ \pm \sqrt{३७}}{२}}$

८५. $(\text{अ} + \text{क्ष})\sqrt{\text{अ}^२+\text{क्ष}^२} = ६(\text{अ} - \text{क्ष})^२$.

उत्तर. $\text{क्ष} = \frac{९ \pm ४\sqrt{२}}{७}\,\text{अ}$.

८६. $(\text{क्ष} + ३)^२ - २(\text{क्ष}^२ + ३) = २\,\text{क्ष}(\text{क्ष} + १)^२$.

उत्तर. $\text{क्ष} = १, २\frac{१}{२}, -३$, किंवा $-\frac{१}{२}$.

८७. $\frac{\text{क्ष}}{\text{क्ष}^२+४\text{क्ष}} + \frac{\text{क्ष}}{\text{क्ष}^२-३\text{क्ष}} = १\frac{१}{८}$.

उत्तर. $\text{क्ष} = ४$, किंवा $-१\frac{२}{३}$.

८८. $\text{क्ष}^५ - ३\,\text{क्ष}^४ - ९\,\text{क्ष}^३ + २१\,\text{क्ष}^२ - १०\,\text{क्ष} + २४ = ०$.

उत्तर. $\text{क्ष} = २, ४, -३$, किंवा $\pm\sqrt{-१}$.

८९. $\frac{\text{क्ष}^२ + १}{\text{क्ष}} - \frac{१}{\sqrt{५}} \cdot \frac{\text{क्ष}-१}{\sqrt{\text{क्ष}}} = ४\frac{२}{५}$.

उत्तर. $\text{क्ष} = ५, \frac{१}{५}$, किंवा $\frac{१६ \mp ३\sqrt{२९}}{१०}$.

१०. $१६(\text{क्ष}^{२}+२)^{\frac{३}{२}}+\frac{३}{\sqrt{\text{क्ष}^{२}+२}}=३२\,\text{क्ष}^{२}+४८.$

उत्तर. $\text{क्ष}=\pm\frac{१}{२}.$

११. $\text{क्ष}^{२\text{म}}-\text{अ}=\frac{\text{अ}}{\text{क्ष}^{\text{म}}}+१.$

उत्तर. $\text{क्ष}=\sqrt[\text{म}]{\frac{१}{२}\pm\sqrt{\text{अ}+\frac{१}{४}}}.$

१२. $\text{क्ष}^{४}-८\,\text{क्ष}^{३}+१०\,\text{क्ष}^{२}+२४\,\text{क्ष}+५=०.$

उत्तर. $\text{क्ष}=५,\ -१,$ किंवा $२\pm\sqrt{५}.$

१३. $\frac{१+\text{क्ष}^{३}}{(१+\text{क्ष})^{३}}=\frac{१}{३}.$ उत्तर. $\text{क्ष}=२,$ किंवा $\frac{१}{२}.$

१४. $\frac{(\text{क्ष}-\text{अ})^{२}}{\sqrt{\text{क्ष}}}+२(\text{क्ष}-\text{अ})=\frac{\text{अ}^{२}}{\sqrt{\text{क्ष}}}+१.$

उत्तर. $\text{क्ष}=२\,\text{अ}+\frac{३}{२}\pm\sqrt{२\,\text{अ}+\frac{५}{४}}.$

१५. $\sqrt{\text{क्ष}^{२}-१}+\frac{\text{क्ष}\sqrt{\text{क्ष}-१}}{\sqrt{\text{क्ष}+१}}=\frac{\sqrt{(\text{क्ष}+१)^{३}}}{\sqrt{\text{क्ष}-१}}.$

उत्तर. $\text{क्ष}=\frac{३\pm\sqrt{१७}}{२}.$

१६. $(१+\text{क्ष}^{३})(१+\text{क्ष}^{२})(१+\text{क्ष})=३०\,\text{क्ष}^{३}.$

उत्तर. $\text{क्ष}=\frac{३\pm\sqrt{५}}{२}.$

१७. $\frac{\text{क्ष}^{४}}{२}+\frac{१७\,\text{क्ष}^{३}}{४}-१७\,\text{क्ष}=८.$

उत्तर. $\text{क्ष}=-८,$ किंवा $-\frac{१}{२}.$

९८. $क्ष^{२}(क्ष^{२} - २१) = १० क्ष(क्ष^{२} - २४) + ६४९.$

उत्तर. $क्ष = \frac{१}{२}(५ \pm ३\sqrt{२९}).$

९९. $\frac{१ + क्ष^{३}}{(१ + क्ष)^{३}} + \frac{१ - क्ष^{३}}{(१ - क्ष)^{३}} = \dot{अ}.$

उत्तर. $क्ष = \left\{\frac{अ + ४ \mp २\sqrt{३(अ + १)}}{अ - २}\right\}^{\frac{१}{२}}.$

१००. $क्ष + ७\sqrt[३]{क्ष} = २२.$

उत्तर. $क्ष = ८$, किंवा $(-१ \pm \sqrt{-१०})^{३}.$

१०१. $\sqrt{क्ष} - \frac{७}{\sqrt{क्ष} - २} = \frac{८}{क्ष}.$

उत्तर. क्ष = १, किंवा १६.

१०२. $क्ष^{४}\sqrt{क्ष} + २क्ष^{३} + ३५ क्ष\sqrt{क्ष} + ३४ = \frac{७२}{क्ष\sqrt{क्ष}}.$

उत्तर. क्ष = १.

ज्यांत दोन किंवा त्यांहून अधिक अव्यक्त पदें आहेत अशीं वर्ग समीकरणें.

उदाहरणें.

१. क्ष + य = १०....(१). } (१) ह्याचा वर्ग कर, आणि
क्ष य = १६....(२). } (२) ह्यास चोहोंनीं गूण.

$क्ष^{२} + २क्षय + य^{२} = १००.$ }
$४ क्षय = ६४.$ } वजाबाकी कर.

$क्ष^{२} - २क्षय + य^{२} = ३६$, वर्गमूळ काढ.

$क्ष - य = \pm ६$ } ह्यांची बेरीज आणि वजा-
(१) $क्ष + य = १०$ } बाकी घे.

२ क्ष = १६, किंवा ४; ∴ क्ष=८, किंवा२.

२ य = ४, किंवा १६; ∴ य=२, किंवा८.

ज्यावेळेस दोन अव्यक्त पदांचा **गुणाकार**, आणि **बेरीज** हीं दिलीं आहेत त्यावेळेस ह्या रीतीची योजना करावी.

२. क्ष - य = ३ . (१) } (१) ह्याचा वर्ग कर आणि
क्ष य = १० . . (२) } (२) ह्यास चोहोंनीं गूण.

क्ष^{२} -२ क्षय + य^{२} =९ }
४ क्षय =४० } बेरीज घे.

क्ष^{२} + २ क्षय + य^{२} = ४९, वर्गमूळ काढ.

क्ष + य=±७ } बेरीज कर, आणि वजाबाकी
(१) क्ष - य= ३ } कर.

२क्ष = १०, किंवा - ४; ∴ क्ष =५, किंवा - २.

२ य = ४, किंवा - १०; ∴ य =२, किंवा - ५.

ज्यावेळेस दोन अव्यक्तपदांचा **गुणाकार** आणि **वजाबाकी** हीं दिलीं आहेत त्यावेळेस ह्यारीतीची योजना करावी.

३. क्ष^{२} + य^{२} = २०२ . . . . (१) } (१) ह्याची दुप्पट कर,
क्ष + य = २० . . . . (२) } आणि (२) ह्याचा वर्गकर.

२ क्ष^{२} + २ य^{२} = ४०४ }
क्ष^{२} + २ क्षय + य^{२} = ४०० } वजाबाकी घे.

क्ष^{२} - २ क्षय + य^{२} = ४, वर्गमूळ काढ.

क्ष - य = ± २ } ∴ क्ष = ११, किंवा ९.
(२) क्ष + य = २० } य = ९, किंवा ११.

ज्यावेळेस दोन अव्यक्तपदांची **बेरीज**, आणि त्यांच्या **वर्गांची बेरीज** हीं दिलीं आहेत त्यावेळेस ह्या रीतीची योजना करावी.

४. $\text{क्ष}^{२} + \text{य}^{२} = ३९४$ .... (१) } (१) ह्याची दुप्पट कर, आ-
$\text{क्ष} - \text{य} = २$ .... (२) } णि (२) ह्याचा वर्ग कर.

$२\,\text{क्ष}^{२} + २\,\text{य}^{२} = ७८८$ }
$\text{क्ष}^{२} - २\,\text{क्षय} + \text{य}^{२} = ४$ } वजाबाकी कर.

$\text{क्ष}^{२} + २\,\text{क्षय} + \text{य}^{२} = ७८४.$

$\therefore \text{क्ष} + \text{य} = \pm २८$ } $\therefore \text{क्ष} = १५$, किंवा $- १३$.
$\text{क्ष} - \text{य} = २$ } $\text{य} = १३$, किंवा $- १५$.

जेव्हां दोन अव्यक्तपदांची **वजाबाकी** व त्यांच्या **वर्गां**-ची **बेरीज** हीं दिलीं आहेत तेव्हां ह्या रीतीची योजना करावी.

५. $\text{क्ष}^{३} + \text{य}^{३} = ४०७$ .... (१) } (१) ह्यास (२) ह्यांनीं भाग,
$\text{क्ष} + \text{य} = ११$ .... (२) } आणि (२) ह्याचा वर्ग कर.

$\text{क्ष}^{२} - \text{क्षय} + \text{य}^{२} = ३७$ } वरील समीकरण खालचे समी-
$\text{क्ष}^{२} + २\,\text{क्षय} + \text{य}^{२} = १२१$ } करणांतून वजाकर.

$३\,\text{क्षय} = ८४$, $\therefore \text{क्षय} = २८.$

$\text{क्ष}^{२} - \text{क्षय} + \text{य}^{२} = ३७$ } वरील समीकरणांत खालचें समी-
$\text{क्षय} = २८$ } करण वजा कर.

$\text{क्ष}^{२} - २\text{क्षय} + \text{य}^{२} = ९$, वर्गमूळ काढ.

$\text{क्ष} - \text{य} = \pm ३$ } $\therefore \text{क्ष} = ७$, किंवा ४.
$\text{क्ष} + \text{य} = ११$ } $\text{य} = ४$, किंवा ७.

$\text{क्ष}^{५} + \text{य}^{५} = \text{अ}$, $\text{क्ष} + \text{य} = \text{ब}$, अथवा $\text{क्ष}^{\text{न}} - \text{य}^{\text{न}} = \text{अ}$, $\text{क्ष} - \text{य} = \text{ब}$, ज्यांत न हा विषम घात प्रकाशक आहे, अथवा असल्या जातीचीं समीकरणें दिलीं असल्यास तीं वरल्या उदाहरणाप्रमाणें पहिल्यास दुसऱ्यानें भागून सोडवावीं.

६. $\text{क्ष}^{४} + \text{य}^{४} = ३३७$ ..(१) }
$\text{क्ष} + \text{य} = ७$ ..(२) } (२) ह्याचा चतुर्घात कर.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{क्ष}^{४} + ४\,\text{क्ष}^{३}\text{य} + ६\,\text{क्ष}^{२}\text{य}^{२} + ४\,\text{क्षय}^{३} + \text{य}^{४} = २४०१ \\ (१)\ \text{क्ष}^{४} \qquad\qquad\qquad + \text{य}^{४} = \ \ ३३७ \end{array}\right\}$$ ह्यांची वजाबाकी कर.

$$४\,\text{क्ष}^{३}\text{य} + ६\,\text{क्ष}^{२}\text{य}^{२} + ४\,\text{क्षय}^{३} = २०६४,$$ ४क्षय ह्यांनीं भाग.

$$\text{क्ष}^{२} + \frac{३}{२}\,\text{क्षय} + \text{य}^{२} = \frac{५१६}{\text{क्षय}},\ (२)$$ ह्याचा वर्ग कर.

$$\text{क्ष}^{२} + २\,\text{क्षय} + \text{य}^{२} = ४९,$$ वजाबाकी घे.

$$\therefore \frac{१}{२}\,\text{क्षय} = ४९ - \frac{५१६}{\text{क्षय}},$$

ह्यास २ क्षय ह्यांनीं गुणून स्थळांतर कर.

$$\text{क्ष}^{२}\text{य}^{२} - ९८\,\text{क्षय} = -\,१०३२,$$ वर्ग पुरा कर.

$$\overline{\text{क्ष}^{२}\text{य}^{२} - ९८\,\text{क्षय} + ४९}\,\big|^{२} = -१०३२ + २४०१ = १३६९,$$

$$\text{क्षय} - ४९ = \pm ३७;$$

$$\therefore \text{क्षय} = ४९ \pm ३७ = ८६, \text{ किंवा } १२.$$

क्षय = १२, आणि क्ष + य = ७, हीं समीकरणें घेऊन पहिल्या उदाहरणाप्रमाणें पुढें कृति कर, ह्मणजे क्ष = ३, किंवा ४; आणि य = ४, किंवा ३, येतील.

७. $$\left.\begin{array}{ll} \text{क्ष}^{२} + \text{य}^{२} + \text{क्ष} + \text{य} = ९२२ \cdots (१) \\ \sqrt{\text{क्षय}} = २० \cdots (२) \end{array}\right\}$$

$$\text{क्षय} = ४००$$

$$२\,\text{क्षय} = ८००,$$

हें पहिल्या समीकरणांत मिळवल्यानें,

$$\text{क्ष}^{२} + २\,\text{क्षय} + \text{य}^{२} + \text{क्ष} + \text{य} = १७२२,$$ वर्ग पुरा कर.

$$\overline{(\text{क्ष}+\text{य})^{२} + (\text{क्ष}+\text{य}) + \frac{१}{२}}\,\big|^{२} = १७२२ + \frac{१}{४} = \frac{६८८९}{४},$$

$$\text{क्ष} + \text{य} + \frac{१}{२} = \pm \frac{८३}{२},$$

$\therefore \text{क्ष} + \text{य} = \frac{\pm ८३ - १}{२} = \frac{८२}{२}$, किंवा $- \frac{८४}{२} = ४१$, किंवा -४२;

आणि $\because$ क्षय = ४००, $\therefore$ पहिल्या उदाहरणाप्रमाणें पुढें कृति केली, ह्मणजे क्ष = २५, आणि य = १६, येतील.

८. $\left.\begin{array}{l} \text{क्ष}^2 + ३\,\text{य} + \text{क्ष} = ७५ - २\text{क्षय} \cdots (१) \\ \text{क्ष} + \text{य}^2 - \text{य} = २४ \cdots\cdots (२) \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} \text{क्ष}^2 + २\text{क्षय} + \text{क्ष} + ३\text{य} = ७५ \\ \text{य}^2 + \text{क्ष} - \text{य} = २४ \cdots (३) \end{array}\right\}$ बेरीज घे.

$\text{क्ष}^2 + २\,\text{क्षय} + \text{य}^2 + २\,\text{क्ष} + २\text{य} = ९९$,

$(\text{क्ष} + \text{य})^2 + २(\text{क्ष} + \text{य}) = ९९$, वर्ग पुरा कर.

$(\text{क्ष} + \text{य})^2 + २(\text{क्ष} + \text{य}) + १ = १००$,

$\text{क्ष} + \text{य} + १ = \pm १०$.

$\text{क्ष} + \text{य} = ९$, किंवा $- ११$.

$\therefore \text{क्ष} = ९ - \text{य}$; ही किंमत (३) ह्यांत मांड.

$\text{य}^2 + ९ - \text{य} - \text{य} = २४$, $\text{य}^2 = १५$,

$\text{य}^2 - २\,\text{य} + १ = १६$, $\text{य} - १ = \pm ४$;

$\therefore \text{य} = १ \pm ४ = ५$, किंवा $- ३$;

आणि $\text{क्ष} = ९ - \text{य} = ४$, किंवा १२.

९. $\left.\begin{array}{l} \text{क्ष}^2 - \text{य}^2 = \text{क्ष}\,\text{य} \cdots (१) \\ \text{क्ष}^2 + \text{य}^2 = \text{क्ष}^3 - \text{य}^3 \cdots (२) \end{array}\right\}$ (१) ह्यास (क्ष + य) ह्यांनीं गुण.

$\left.\begin{array}{l} \text{क्ष}^3 + \text{क्ष}^2\text{य} - \text{क्षय}^2 - \text{य}^3 = \text{क्षय}(\text{क्ष} + \text{य}) \\ \text{क्ष}^3 - \text{य}^3 = \text{क्ष}^2 + \text{य}^2 \end{array}\right\}$ वजाबाकी कर.

$\text{क्ष}^2\text{य} - \text{क्ष}\,\text{य}^2 = \text{क्ष}^2\text{य} + \text{क्षय}^2 - \text{क्ष}^2 - \text{य}^2$.

$$\therefore \text{क्ष}^{२} + \text{य}^{२} = २\,\text{क्षय}^{२}$$
$$(१)\ \text{क्ष}^{२} - \text{य}^{२} = \text{क्षय}$$
बेरीज कर.

$$२\,\text{क्ष}^{२} = २\text{क्षय}^{२} + \text{क्षय},$$ २क्ष ह्यांनीं भाग.

$$\text{क्ष} = \text{य}^{२} + \frac{\text{य}}{२}$$
$$\text{क्ष}^{२} = \text{य}^{४} + \text{य}^{३} + \frac{\text{य}^{२}}{४}$$
ह्या क्ष आणि क्ष² ह्याच्या किंमती (१) ह्यांत ठेव.

$$\text{य}^{४} + \text{य}^{३} + \frac{\text{य}^{२}}{४} - \text{य}^{२} = \text{य}^{३} + \frac{\text{य}^{२}}{२},$$

$$\text{य}^{४} = \text{य}^{२} + \frac{\text{य}^{२}}{२} - \frac{\text{य}^{२}}{४},$$

$$\text{य}^{४} = \frac{५\text{य}^{२}}{४},\ \text{य}^{२} = \frac{५}{४},\ \therefore \text{य} = \frac{\pm\sqrt{५}}{२};$$

$$\text{आणि क्ष} = \frac{५}{४} + \frac{\sqrt{५}}{४} = \frac{\sqrt{५}(\sqrt{५}+१)}{४}.$$

१०.
$$५ + \sqrt{\text{क्षय}} = ४\sqrt{\text{य}+२} \cdots (१)$$
$$८ + \text{क्ष} = \sqrt{१२८+६४\text{य}} \cdots (२)$$

$$(२)\ ८ + \text{क्ष} = \sqrt{६४(\text{य}+२)},$$

$$८ + \text{क्ष} = ८\sqrt{\text{य}+२}$$
$$(१)\ १०+२\sqrt{\text{क्षय}} = ८\sqrt{\text{य}+२}$$
वजाबाकी कर.

$$२ + २\,\text{क्ष}^{\frac{१}{२}}\,\text{य}^{\frac{१}{२}} - \text{क्ष} = ०,$$

$$\therefore २\,\text{क्ष}^{\frac{१}{२}}\,\text{य}^{\frac{१}{२}} = \text{क्ष} - २,\ \therefore \text{य}^{\frac{१}{२}} = \frac{\text{क्ष} - २}{२\,\text{क्ष}^{\frac{१}{२}}},$$

$$\therefore \text{य} = \frac{(\text{क्ष} - २)^{२}}{४\,\text{क्ष}},\ \therefore ६४\text{य} = \frac{१६(\text{क्ष}-२)^{२}}{\text{क्ष}},$$ (२) ह्याचा वर्ग कर.

$६४ + १६ क्ष + क्ष^{२} = ६४ य + १२८,$

$क्ष^{२} + १६ क्ष + ६४ - १२८ = \frac{१६ (क्ष - २)^{२}}{क्ष},$

$क्ष^{३} + १६ क्ष^{२} - ६४ क्ष = १६ क्ष^{२} - ६४ क्ष + ६४,$

$क्ष^{३} = ६४, \therefore क्ष = ४;$

आणि $य = \frac{(४ - २)^{२}}{१६} = \frac{२^{२}}{१६} = \frac{४}{१६} = \frac{१}{४}.$

११. $\left. \begin{array}{l} क्ष^{४} = ३ क्ष + २ य \\ य^{४} = ३ य + २ क्ष \end{array} \right\}$ ह्यांची बेरीज आणि वजाबाकी कर.

$\left. \begin{array}{l} क्ष^{४} + य^{४} = ५ (क्ष + य) \cdot (१) \\ क्ष^{४} - य^{४} = क्ष - य \cdots (२) \end{array} \right\}$

(२) $(क्ष^{२} + य^{२}) (क्ष^{२} - य^{२}) = क्ष - य$, क्ष - य ह्यानें भाग.

$(क्ष^{२} + य^{२}) (क्ष + य) = १ \cdot (३), \therefore क्ष + य = \frac{१}{क्ष^{२} + य^{२}},$

$(१) क्ष^{४} + य^{४} = \frac{५}{क्ष^{२} + य^{२}}, \therefore (क्ष^{२} + य^{२}) (क्ष^{४} + य^{४}) = ५ \cdots\cdots (४)$

(३) ह्याचा वर्ग कर आणि त्यास (४) ह्यांनीं भाग.

$$\frac{(क्ष^{२} + य^{२})^{२} (क्ष + य)^{२}}{(क्ष^{४} + य^{४}) (क्ष^{२} + य^{२})} = \frac{१}{५},$$

$$\frac{(क्ष^{२} + य^{२}) (क्ष + य)^{२}}{क्ष^{४} + य^{४}} = \frac{१}{५},$$

अथवा, $\frac{क्ष^{४} + २ क्ष^{३} य^{२} + य^{४} + २ क्ष^{३} य + २ क्ष य^{३}}{क्ष^{४} + य^{४}} = \frac{१}{५},$

ह्या समीकरणाचे छेद सोडवून त्यास ४ $क्ष^{२} य^{२}$ ह्यांनीं भागल्यानें,

$\frac{\text{क्ष}^{२}}{\text{य}^{२}} + \frac{५}{२} + \frac{\text{य}^{२}}{\text{क्ष}^{२}} + \frac{५}{२} . \frac{\text{क्ष}}{\text{य}} + \frac{५}{२} . \frac{\text{य}}{\text{क्ष}} = ०$, $\frac{१}{२}$ वजा कर,

$$\frac{\text{क्ष}^{२}}{\text{य}^{२}} + २ + \frac{\text{य}^{२}}{\text{क्ष}^{२}} + \frac{५}{२}\left(\frac{\text{क्ष}}{\text{य}} + \frac{\text{य}}{\text{क्ष}}\right) = - \frac{१}{२},$$

अथवा $\left(\frac{\text{क्ष}}{\text{य}} + \frac{\text{य}}{\text{क्ष}}\right)^{२} + \frac{५}{२}\left(\frac{\text{क्ष}}{\text{य}} + \frac{\text{य}}{\text{क्ष}}\right) = - \frac{१}{२};$

वर्ग पुरा केल्यानें, आणि वर्गमूळ काढल्यानें,

$\frac{\text{क्ष}}{\text{य}} + \frac{\text{य}}{\text{क्ष}} = \frac{-५\pm\sqrt{१७}}{४}$, $\frac{\text{क्ष}}{\text{य}}$ ह्यानें गुणून स्थलांतर कर.

$\frac{\text{क्ष}^{२}}{\text{य}^{२}} + \frac{५\mp\sqrt{१७}}{४} . \frac{\text{क्ष}}{\text{य}} = - १$, वर्ग पुराकरून मूळ काढ.

$$\frac{\text{क्ष}}{\text{य}} = - \frac{५\mp\sqrt{१७}\mp\sqrt{-२२\mp१०\sqrt{१७}}}{८}.$$

$$(२)\ (\text{क्ष}^{२}+\text{य}^{२})(\text{क्ष}+\text{य})(\text{क्ष}-\text{य}) - (\text{क्ष}-\text{य}) = ०,$$

$$\left\{(\text{क्ष}^{२}+\text{य}^{२})(\text{क्ष}+\text{य}) - १\right\}(\text{क्ष}-\text{य}) = ०,$$

$$\therefore \text{क्ष} - \text{य} = ०, \therefore \text{क्ष} = \text{य}.$$

हें उदाहरण सोडवितांना शेवटीं असें दिसून येतें कीं जो गुणक समीकरणांतील सर्व पदांस साधारण आहे त्याची किंमत ० आहे.

पुनः, $\text{क्ष}^{४} = ३\ \text{क्ष} + २\ \text{क्ष} = ५\ \text{क्ष}, \therefore \text{क्ष}^{३} = ५, \therefore \text{क्ष} = \sqrt[३]{५}.$

ज्या समीकरणांतील प्रत्येक पदांत अव्यक्त पदांच्या **घातप्रकाशकांची बेरीज** एकसारखीच आहे, त्या समीकरणांस **सजातीयसमीकरणें** ह्मणतात. आणि तीं समीकरणें सोडविण्यास जर सुगम रीति सांपडत नाहीं, तर त्यांतील एक अव्यक्त पद, दुसऱ्या अव्यक्त पदास एकाद्या अव्यक्त गुणकानें

गुणून, त्याबरोबर धरून तीं समीकरणें सोडवावीं. ही रीति खालच्या उदाहरणांत दाखविली आहे.

१२. $\left.\begin{array}{l}\text{क्ष}^{२}+\text{य}^{२}=३४\\ \text{क्ष}^{२}-\text{क्षय}=१०\end{array}\right\}$ क्ष = वय घे, तर $\text{क्ष}^{२}=\text{व}^{२}\text{य}^{२}$, आणि, $\text{क्षय}=\text{वय}^{२}$,

$\therefore \text{व}^{२}\text{य}^{२}+\text{य}^{२}=३४,\ (\text{व}^{२}+१)\text{य}^{२}=३४,\ \therefore \text{य}^{२}=\frac{३४}{\text{व}^{२}+१},$

$\text{व}^{२}\text{य}^{२}-\text{वय}^{२}=१०,\ (\text{व}^{२}-\text{व})\text{य}^{२}=१०,\ \therefore \text{य}^{२}=\frac{१०}{\text{व}^{२}-\text{व}}.$

$\therefore \frac{३४}{\text{व}^{२}+१}=\frac{१०}{\text{व}^{२}-\text{व}}$, अथवा, $\frac{१७}{\text{व}^{२}+१}=\frac{५}{\text{व}^{२}-\text{व}}$,

$१७\,\text{व}^{२}-१७\,\text{व}=५\,\text{व}^{२}+५.\ १२\,\text{व}^{२}-१७\,\text{व}=५.$

$\therefore \text{व}^{२}-\frac{१७}{१२}\text{व}=\frac{५}{१२}$, आणि हें वर्ग समीकरण सोडविल्यानें, $\text{व}=\frac{५}{३}$,

$\therefore \text{य}^{२}=\frac{१०}{\text{व}^{२}-\text{व}}=\frac{१०}{\frac{२५}{९}-\frac{५}{३}}=\frac{९०}{२५-१५}=\frac{९०}{१०}=९,$

$\therefore \text{य}=३$, आणि $\text{क्ष}=\text{वय}=\frac{५}{३}\times ३=५.$

१३. $\left.\begin{array}{l}\text{क्ष}^{२}+\text{क्षय}+\text{य}^{२}=३७\cdots(\text{अ})\\ \text{क्ष}^{२}+\text{क्षज्ञ}+\text{ज्ञ}^{२}=२८\cdots(\text{ब})\\ \text{य}^{२}+\text{यज्ञ}+\text{ज्ञ}^{२}=१९\cdots(\text{क})\end{array}\right\}$ हें उदाहरण पाठीमागचे रीतीनें सुटेल, पण आपण हें दुसरे रीतीनें सोडवूं.

$\left.\begin{array}{l}\text{अ}-\text{ब},\ \text{य}^{२}-\text{ज्ञ}^{२}+(\text{य}-\text{ज्ञ})\text{क्ष}=९\\ \text{ब}-\text{क},\ \text{क्ष}^{२}-\text{य}^{२}+(\text{क्ष}-\text{य})\text{ज्ञ}=९\end{array}\right\}$ अथवा,

$\left.\begin{array}{l}\text{क्ष}+\text{य}+\text{ज्ञ}=\frac{९}{\text{य}-\text{ज्ञ}}\\ \text{क्ष}+\text{य}+\text{ज्ञ}=\frac{९}{\text{क्ष}-\text{य}}\end{array}\right\}\cdots\cdots(\text{ड})$

$\therefore \frac{९}{य-ज्ञ} = \frac{९}{क्ष-य}$, अथवा $य - ज्ञ = क्ष - य$,

$\therefore क्ष + ज्ञ = २ य$, ही किंमत (ड) ह्यांत मांड.

$३य = \frac{९}{य-ज्ञ}$, $य = \frac{३}{य-ज्ञ}$, $य^२ - यज्ञ = ३$,

$$\left.\begin{array}{l} यज्ञ = य^२ - ३, \; \therefore ज्ञ = \frac{य^२-३}{य} \\ ज्ञ^२ = \frac{य^४-६य^२+९}{य^२} \end{array}\right\}$$ ह्या किंमती (क) ह्यांत मांड.

$$य^२ + य^२ - ३ + \frac{य^४-६य^२+९}{य^२} = १९,$$

$$२ य^२ + \frac{य^४-६य^२+९}{य^२} = २२,$$

$$२ य^४ + य^४ - ६ य^२ + ९ = २२ य^२,$$

$$३ य^४ - २८ य^२ = - ९, \; य^४ - \tfrac{२८}{३} य^२ = - ३,$$

$$\left[य^२ - \frac{१४}{३}\right]^२ = - ३ + \frac{१९६}{९} = \frac{१९६}{९} - \frac{२७}{९} = \frac{१६९}{९},$$

$$य^२ - \frac{१४}{३} = \pm \frac{१३}{३}, \; य^२ = \frac{१४\pm१३}{३} = ९,$$

$$\therefore य = \pm ३, \quad \therefore ज्ञ = य - \frac{३}{य} = \pm३ - \frac{३}{\pm३} = \pm२,$$

आणि $क्ष = २ य - ज्ञ = \pm ६ \mp २ = \pm ४$.

उदाहरणें.

१. $\left.\begin{array}{l} क्ष^२ + य^२ = २०. \\ क्ष^२ - य^२ = १२. \end{array}\right\}$ उत्तर. $\left\{\begin{array}{l} क्ष = ४. \\ य = २. \end{array}\right.$

२. $\left.\begin{array}{l} क्ष + य = ६. \\ क्ष^{२} + य^{२} = २६. \end{array}\right\}$ उत्तर. $\left\{\begin{array}{l} क्ष = ५. \\ य = १. \end{array}\right.$

३. $\left.\begin{array}{l} क्ष^{२} + य^{२} = १०. \\ क्ष - य = २. \end{array}\right\}$ उत्तर. $\left\{\begin{array}{l} क्ष = ३. \\ य = १. \end{array}\right.$

४. $\left.\begin{array}{l} क्ष^{२} + य^{२} = २५. \\ क्ष + य = १. \end{array}\right\}$ उत्तर. $\left\{\begin{array}{l} क्ष = ४, किंवा\ -३ \\ य = -३, किंवा\ ४. \end{array}\right.$

५. $\left.\begin{array}{l} क्ष^{२} + य^{२} = १६. \\ क्ष + य = ८. \end{array}\right\}$ उत्तर. $\left\{\begin{array}{l} क्ष = ५. \\ य = ३. \end{array}\right.$

६. $\left.\begin{array}{l} क्ष - य = १ \\ क्ष^{३} - य^{३} = १९. \end{array}\right\}$ उत्तर. $\left\{\begin{array}{l} क्ष = ३, किंवा\ -२. \\ य = २, किंवा\ -३. \end{array}\right.$

७. $\left.\begin{array}{l} क्ष^{३} + य^{३} = १८९. \\ क्ष^{२}य + क्षय^{२} = १८०. \end{array}\right\}$ उ० $\left\{\begin{array}{l} क्ष = ५, किंवा\ ४. \\ य = ४, किंवा\ ५. \end{array}\right.$

८. $\left.\begin{array}{l} १० क्ष + य = ३क्षय. \\ य - क्ष = २. \end{array}\right\}$ उत्तर. $\left\{\begin{array}{l} क्ष = २, किंवा\ -\frac{\ }{३} \\ य = ४, किंवा\ \frac{५}{३} \end{array}\right.$

९. $\left.\begin{array}{r} क्ष^{२} + य^{२} + क्ष + य = १८. \\ २ क्षय = १२. \end{array}\right\}$ उ० $\left\{\begin{array}{l} क्ष = ३, २, -३ \pm \sqrt{३}. \\ य = २, ३, -३ \mp \sqrt{३}. \end{array}\right.$

१०. $\left.\begin{array}{l} क्ष^{२}य^{४} + य^{२} = १०. \\ क्षय^{२} + य = ४. \end{array}\right\}$ उत्तर. $\left\{\begin{array}{l} क्ष = ३. \\ य = १. \end{array}\right.$

११. $\left.\begin{array}{l} \frac{क्ष + य}{क्ष - य} = अ^{२}. \\ क्ष^{२} - य^{२} = ब^{२} \end{array}\right\}$ उत्तर. $\left\{\begin{array}{l} क्ष = \frac{ब}{२अ}(अ^{२} + १). \\ य = \frac{ब}{२अ}(अ^{२} - १). \end{array}\right.$

१२. $\left.\begin{array}{r} ९ क्ष^{२} = ४ य^{२}. \\ ३ क्षय + २ क्ष + य = ४८५. \end{array}\right\}$ उ० $\left\{\begin{array}{l} क्ष = १०, -१०\frac{७}{९}. \\ य = १५, -१६\frac{१}{६}. \end{array}\right.$

१३. $\left.\begin{array}{l}\text{क्ष}^{२} + \text{य}^{२} - \text{क्ष} - \text{य} = ७८. \\ \text{क्षय} + \text{क्ष} + \text{य} = ३९.\end{array}\right\}$

उत्तर. $\left\{\begin{array}{l}\text{क्ष} = \dfrac{-१२\pm\sqrt{-३९}}{२},\ ९,\ \text{किंवा}\ ३. \\ \text{य} = \dfrac{-१३\mp\sqrt{-३९}}{२},\ ३,\ \text{किंवा}\ ९.\end{array}\right.$

१४. $\left.\begin{array}{l}\dfrac{१}{\text{य}} - \dfrac{१}{\text{क्ष}} = \dfrac{१}{४}. \\ \text{क्ष}^{२}\text{य} - \text{क्षय}^{२} = १६.\end{array}\right\}$ उ० $\left\{\begin{array}{l}\text{क्ष} = ४,\ \text{किंवा}\ -२. \\ \text{य} = २,\ \text{किंवा}\ -४.\end{array}\right.$

१५. $\left.\begin{array}{l}\text{क्ष}^{२} + \text{क्षय} = \text{अ}^{२} + \text{अब}. \\ \text{य}^{२} + \text{यक्ष} = \text{ब}^{२} + \text{अब}.\end{array}\right\}$ उ० $\left\{\begin{array}{l}\text{क्ष} = \text{अ}. \\ \text{य} = \text{ब}.\end{array}\right.$

१६. $\left.\begin{array}{l}१२\ \text{क्षय} = ५\ \text{क्ष} + १२\ \text{य}. \\ \text{य}^{२} - \text{क्ष}^{२} = १.\end{array}\right\}$ उ० $\left\{\begin{array}{l}\text{क्ष} = १\frac{१}{३}. \\ \text{य} = १\frac{२}{३}.\end{array}\right.$

१७. $\left.\begin{array}{l}२\ \text{य} + ३\ \text{क्ष} = ८. \\ ३\ \text{य}^{२} + २\ \text{क्ष}^{२} = ११.\end{array}\right\}$ उ० $\left\{\begin{array}{l}\text{क्ष} = २,\ \text{किंवा}\ २\frac{४}{३५}. \\ \text{य} = १,\ \text{किंवा}\ \frac{२९}{३५}.\end{array}\right.$

१८. $\left.\begin{array}{l}\text{य} - \text{क्ष} = २. \\ ३\ \text{क्षय} = १०\ \text{क्ष} + \text{य}.\end{array}\right\}$ उ० $\left\{\begin{array}{l}\text{क्ष} = २,\ \text{किंवा} -\frac{१}{३}. \\ \text{य} = ४,\ \text{किंवा}\ १\frac{२}{३}.\end{array}\right.$

१९. $\left.\begin{array}{l}\text{क्ष} + \text{य} + \sqrt{\text{क्ष}+\text{य}} = १२. \\ \text{क्ष}^{३} + \text{य}^{३} = १८९.\end{array}\right\}$ उ $\left\{\begin{array}{l}\text{क्ष} = ५,\ \text{किंवा}\ ४. \\ \text{य} = ४,\ \text{किंवा}\ ५.\end{array}\right.$

२०. $\left.\begin{array}{l}४\ \text{क्षय} = ९६ - \text{क्ष}^{२}\text{य}^{२}. \\ \text{क्ष} + \text{य} = ६.\end{array}\right\}$ उ० $\left\{\begin{array}{l}\text{क्ष} = ४,\ २,\ ३\pm\sqrt{२१}. \\ \text{य} = २,\ ४,\ ३\pm\sqrt{२१}.\end{array}\right.$

२१. $\left.\begin{array}{l}\dfrac{\text{क्ष}^{२} + \text{य}^{२}}{\text{क्षय}} = \dfrac{१३}{६}. \\ \text{क्ष}^{३}\text{य} + \text{क्षय}^{३} = \text{क्ष}^{२}\text{य}^{२} + ४२.\end{array}\right\}$ उ० $\left\{\begin{array}{l}\text{क्ष} = ३. \\ \text{य} = २.\end{array}\right.$

२२. $\left.\begin{array}{l}\text{क्ष}^{२}+\text{य}^{२}+४\text{क्ष}-६\text{य} = १३. \\ \text{क्षय}-३\ \text{क्ष}+२\text{य} = ११.\end{array}\right\}$ उ० $\left\{\begin{array}{l}\text{क्ष} = ३,\ -१,\ -३,\ -७. \\ \text{य} = ४,\ ८,\ -२,\ २.\end{array}\right.$

२३. (क्ष^{२}+य^{२}) क्ष^{२}य^{२} = ३६००.
क्ष^{२}य+क्षय^{२} = ८४.
} उ० { क्ष = ३, ४.
य = ४, ३.

२४. क्ष^{४} + य^{४} = २६५७.
क्ष + य = ११.
} उ० { क्ष = ७, किंवा ४.
य = ४, किंवा ७.

२५. २ क्ष + २ य − क्ष^{२} − य^{२} + २ = ०.
क्षय = ३.

उ० { क्ष = ३, १, किंवा − (१ ± $\sqrt{-२}$).
य = १, ३, किंवा − (१ ∓ $\sqrt{-२}$).

२६. क्ष^{२} + य^{२} = ६१.
क्ष^{२} − क्षय = ६.
} उत्तर. { क्ष = ६.
य = ५.

२७. क्ष + य = १०.
क्ष^{५} + य^{५} = १७०५०.
} उ० { क्ष = ७, किंवा ३.
य = ३, किंवा ७.

२८. क्ष^{२} + क्षय + य^{२} = २१.
क्ष − क्ष$^{\frac{१}{२}}$ य$^{\frac{१}{२}}$ + य = ३.
} उ० { क्ष = १.
य = ४.

२९. क्ष^{२}य^{२} + १२ क्षय = ९ क्ष^{२} + ४ य^{२}.
क्ष^{२} + ४ क्ष + य^{२} = ६ य + २४.
} उत्तर. { क्ष = ४, −३.
य = २, ९.

३०. क्ष − य = २.
क्ष^{४} + य^{४} = २७२.
} उ० { क्ष = ४, − २, $\sqrt{-१५}$ + १.
य = २, − ४, $\sqrt{-१५}$ − १.

३१. क्ष^{२} + २ क्षय + य + ३ क्ष = ७३.
य^{२} + क्ष + ३ य = ४४.
} उ० { क्ष = ४, १६.
य = ५, −७.

३२. (क्ष^{२} + य^{२}) · (क्ष + य) = १२०.
(क्ष − य) · (क्ष^{२} − य^{२}) = २४.
} उ० { क्ष = ४.
य = २.

३३. क्षय = ६.
३ क्ष^{२} − ७ य^{२} + १ = ०.
} उत्तर. { क्ष = ± ३.
य = ± २.

३४. $२ क्ष^{-\frac{१}{४}} य^{-\frac{१}{४}} = १ + क्ष^{\frac{३}{४}} य^{\frac{१}{४}}$
$क्ष - य = \sqrt{अ - क्ष + य} - \sqrt{अ + क्ष - य}$ } उत्तर. { $क्ष = १.$ $य = १.$

३५. $क्ष - य = ३.$
$क्ष^{३} + य^{३} = १९ (क्ष + य)$ } उ० { $क्ष = ५, - २.$ $य = २, - ५.$

३६. $क्ष - २\sqrt{क्षय} + य - \sqrt{क्ष} + \sqrt{य} = ०$
$\sqrt{क्ष} + \sqrt{य} = ५.$ }

उत्तर. $क्ष = ९$, किंवा $\frac{२५}{४}$; $य = ४$, किंवा $\frac{२५}{४}$.

३७. $\frac{क्ष^{२}}{य^{२}} + \frac{४क्ष}{य} = ९\frac{४}{९}.$
$क्ष - य = २.$ } उत्तर. { $क्ष = ५.$ $य = ३.$

३८. $क्ष^{४} - २ क्ष^{२}य + य^{२} = ४९.$
$क्ष^{४} - २ क्ष^{२}य^{२} + य^{४} - क्ष^{२} + य^{२} = २०.$ }

उत्तर. { $क्ष = \pm ३$, किंवा $\pm \sqrt{६}.$ $य = २$, किंवा $- १.$

३९. $क्ष^{न} + य^{न} = अ.$
$क्षय = ब.$ } उ० { $क्ष = \sqrt[न]{\frac{१}{२}(\sqrt{अ - ४ब^{न}} + अ)}.$ $य = \frac{ब}{\sqrt[न]{\frac{१}{२}(\sqrt{अ - ४ब^{न}} + अ)}}.$

४०. $\frac{क्ष^{२}}{य^{२}} + \frac{य^{२}}{क्ष^{२}} - \frac{३}{२}\left(\frac{क्ष}{य} + \frac{य}{क्ष}\right) = २\frac{३}{५०}.$
$४ क्ष - ५ य = १०.$ }

उत्तर. $क्ष = ५, य = २.$

४१. $क्ष^{२} - क्षय = ४८ य.$
$क्षय - य^{२} = ३ क्ष.$ } उ० { $क्ष = १६, -९\frac{३}{५}.$ $य = ४, २\frac{२}{५}.$

४२. $क्ष^{२} + य^{२} - १५ (क्ष + य.) = - ७०$
$३ क्षय + २१ (क्ष + य.) = २१०$ } उ० { $क्ष = २.$ $य = ४.$

४३. $\begin{cases} \sqrt{\text{य}} : \sqrt{\text{क्ष}} : : \sqrt{\text{क्ष}}+\text{३} : \sqrt{\text{क्ष}}+\text{१}. \\ \sqrt{\text{क्षय}}+\text{२}\sqrt{\text{य}}=\text{३क्ष}+\text{३}\sqrt{\text{क्ष}}. \end{cases}$ उ० $\begin{cases} \text{क्ष}=\text{१}. \\ \text{य}=\text{४}. \end{cases}$

४४. $\begin{cases} \frac{\text{क्ष}}{\text{य}} - \frac{\text{य}}{\text{क्ष}} = \frac{\text{११}}{\text{३०}}. \\ \text{क्ष} + \text{क्षय} = \text{६६}. \end{cases}$ उत्तर. $\begin{cases} \text{क्ष} = \text{६}. \\ \text{य} = \text{५}. \end{cases}$

४५. $\begin{cases} \text{३ क्ष}^{\text{२}} = \text{२ क्षय} + \text{२४}. \\ \text{य}^{\text{२}} = \text{क्षय} - \text{३}. \end{cases}$ उत्तर. $\begin{cases} \text{क्ष} = \text{४}. \\ \text{य} = \text{३}. \end{cases}$

४६. $\begin{cases} \text{क्ष}^{\text{२}}-\text{२ क्षय} + \text{३ य}^{\text{२}} = \text{९}. \\ \text{क्ष}^{\text{२}}-\text{४ क्षय} + \text{५ य}^{\text{२}} = \text{५}. \end{cases}$ उ० $\begin{cases} \text{क्ष}=\pm\text{३},\pm\frac{\text{५}}{\sqrt{\text{२}}} \\ \text{य}=\pm\text{२},\pm\frac{\text{१}}{\sqrt{\text{२}}}. \end{cases}$

४७. $\begin{cases} \text{२क्ष}^{\text{२}}-\text{३ क्षय} + \text{य}^{\text{२}} = \text{४}. \\ \text{क्ष}^{\text{२}}-\text{२ क्षय} + \text{३ य}^{\text{२}} = \text{९}. \end{cases}$ उ० $\begin{cases} \text{क्ष} = \pm \text{३}. \\ \text{य} = \pm \text{२}. \end{cases}$

४८. $\begin{cases} \text{क्ष}^{\frac{\text{३}}{\text{२}}} + \text{य}^{\frac{\text{२}}{\text{३}}} = \text{३क्ष}. \\ \text{क्ष}^{\frac{\text{१}}{\text{२}}} + \text{य}^{\frac{\text{१}}{\text{३}}} = \text{क्ष}. \end{cases}$ उ० $\begin{cases} \text{क्ष}=\{(+\text{२})^{\text{२}}=\text{४}\},\{(-\text{१})^{\text{२}}=\text{१}\} \\ \text{य} = \text{८}. \end{cases}$

४९. $\begin{cases} \sqrt{\frac{\text{३क्ष}}{\text{क्ष}+\text{य}}} + \sqrt{\frac{\text{क्ष}+\text{य}}{\text{३ क्ष}}} = \text{२}. \\ \text{क्षय}-(\text{ क्ष}+\text{य }) = \text{५४}. \end{cases}$ उ० $\begin{cases} \text{क्ष} = \text{६}, -\frac{\text{९}}{\text{२}} \\ \text{य} = \text{१२}, - \text{९}. \end{cases}$

५०. $\begin{cases} (\text{ क्ष}+\text{य }) = \text{३}(\text{ क्ष}-\text{य})^{\frac{\text{१}}{\text{३}}}. \\ (\text{ क्ष}^{\text{३}}+\text{य}^{\text{३}})(\text{क्ष}+\text{य}) = \text{२७}. \end{cases}$ उ० $\begin{cases} \text{क्ष} = \text{२}. \\ \text{य} = \text{१}. \end{cases}$

५१. $\begin{cases} \frac{\text{क्ष}^{\text{२}} + \text{क्षय} + \text{य}^{\text{२}}}{\text{क्ष}^{\text{२}} - \text{क्षय} + \text{य}^{\text{२}}} = \text{२ }\frac{\text{१}}{\text{३}}. \\ \frac{\text{१}}{\text{क्ष}} + \frac{\text{२}}{\text{य}} = \text{१ }\frac{\text{१}}{\text{२}}. \end{cases}$ उ० $\begin{cases} \text{क्ष} = \text{२},\ \text{१}. \\ \text{य} = \text{१},\ \text{२}. \end{cases}$

५२. $\left.\begin{array}{l} \text{२ क्ष}^{२} - \text{२ क्षय} = \text{३ य.} \\ \text{३ क्षय} - \text{३ य}^{२} = \text{२ क्ष.} \end{array}\right\}$ उ० $\left\{\begin{array}{l} \text{क्ष} = \text{३.} \\ \text{य} = \text{२.} \end{array}\right.$

५३. $\left.\begin{array}{l} (\text{क्ष}+\text{य})(\text{क्ष}-\text{य})^{२} = \text{३२.} \\ \text{क्ष}^{२} - \text{य}^{२} - \text{क्ष} - \text{य} = \text{८.} \end{array}\right\}$ उ० $\left\{\begin{array}{l} \text{क्ष} = \text{५.} \\ \text{य} = \text{३.} \end{array}\right.$

५४. $\left.\begin{array}{l} \text{४ क्षय}^{२} - \text{क्ष}^{४}\text{य}^{२} = \dfrac{\text{य}^{६}}{\text{४}} - \text{४.} \\ \text{क्ष}^{३} - \text{क्षय}(\text{क्ष} - \text{य}) = \text{३.} \end{array}\right\}$ उ० $\left\{\begin{array}{l} \text{क्ष} = \text{१.} \\ \text{य} = \text{२.} \end{array}\right.$

५५. $\left.\begin{array}{l} (\text{क्ष}+\text{य})^{\frac{१}{२}} - (\text{क्ष}-\text{य})^{\frac{१}{२}} = \text{अ.} \\ (\text{क्ष}+\text{य})^{\frac{१}{४}} + (\text{क्ष}-\text{य})^{\frac{१}{४}} = \text{ब.} \end{array}\right\}$

$$\text{उ० क्ष} = \frac{\text{अ}^{२}}{\text{४}} + \left\{\frac{१}{४}\left(\text{ब}^{२} + \frac{\text{अ}^{२}}{\text{ब}^{२}}\right)\right\}^{२},\ \text{य} = \frac{\text{अ}}{\text{४}}\left(\text{ब}^{२} + \frac{\text{अ}^{२}}{\text{ब}^{२}}\right).$$

५६. $\left.\begin{array}{l} (\text{क्ष}^{२}+\text{य}^{२})(\text{क्ष}+\text{य}) = \text{२ क्षय.} \\ (\text{क्ष}^{४}-\text{य}^{४})(\text{क्ष}^{२}+\text{य}^{२}) = \text{क्ष}^{२}\text{य}^{२}. \end{array}\right\}$ उ० $\left\{\begin{array}{l} \text{क्ष} = \frac{७५}{५३६}. \\ \text{य} = \frac{४५}{१३६}. \end{array}\right.$

५७. $\left.\begin{array}{l} (\text{क्ष}^{२}+\text{य}^{२})\ \dfrac{\text{य}}{\text{क्ष}} = \dfrac{२६}{३}. \\ (\text{क्ष}^{२}-\text{य}^{२})\ \dfrac{\text{क्ष}}{\text{य}} = \dfrac{१५}{२}. \end{array}\right\}$ उ० $\left\{\begin{array}{l} \text{क्ष} = \text{३.} \\ \text{य} = \text{२.} \end{array}\right.$

५८. $\left.\begin{array}{l} (\text{क्ष}^{२}+\text{य}^{२}) - (\text{क्ष}^{४}+\text{य}^{४}) = \frac{६३}{२५६}. \\ (\text{क्ष}+\text{य})^{२} + (\text{क्षय}-२)\text{ क्षय} = \frac{२१}{६४}. \end{array}\right\}$ उ० $\left\{\begin{array}{l} \text{क्ष} = \frac{१}{२}. \\ \text{य} = \frac{१}{४}. \end{array}\right.$

५९. $\left.\begin{array}{l} (\text{क्ष} - २)\text{ य} + \text{क्ष} - \text{२ य}^{२} = (\text{य}^{२} - १)\sqrt{\text{क्षय}}. \\ \dfrac{\sqrt{\text{क्षय}} - १२}{\text{क्षय} - १८} = \dfrac{\text{क्षय}}{\text{४}}. \end{array}\right\}$

उत्तर. क्ष = ८, य = २.

६०. $\left.\begin{array}{l} (\text{क्ष}^{४}-\text{य}^{४})(\text{क्ष}^{२}-\text{य}^{२}) = \text{४५ क्ष}^{२}\text{य}^{२}. \\ (\text{क्ष}^{२}+\text{य}^{२})(\text{क्ष}+\text{य}) = \text{१५ क्षय} \end{array}\right\}$ उ० $\left\{\begin{array}{l} \text{क्ष} = \text{४.} \\ \text{य} = \text{२.} \end{array}\right.$

६१. $\left.\begin{array}{l}\sqrt[४]{\text{क्ष}+\text{य}}+\sqrt[४]{\text{क्ष}-\text{य}}=\text{य}. \\ \text{क्षय}+\sqrt{\text{क्ष}^{२}\text{य}^{२}-\text{य}^{४}}=\sqrt{\text{क्ष}+\text{य}}+\sqrt{\text{क्ष}-\text{य}}.\end{array}\right\}$

उत्तर. $\text{क्ष}=\text{य}=\sqrt[३]{२}.$

६२. $\left.\begin{array}{l}८\sqrt{\text{य}+२}=\text{क्ष}+८. \\ \text{क्ष}^{\frac{१}{२}}-\text{य}^{\frac{१}{२}}=(\text{य}+२)^{\frac{१}{२}}.\end{array}\right\}$ उ० $\left\{\begin{array}{l}\text{क्ष}=४. \\ \text{य}=\frac{१}{४}.\end{array}\right.$

६३. $\left.\begin{array}{l}\text{क्ष}^{२}-\text{क्षय}+\text{य}^{२}=\dfrac{९१}{\text{क्ष}^{२}+\text{य}^{२}}. \\ \text{क्ष}^{२}+\text{क्षय}+\text{य}^{२}=\dfrac{१३३}{\text{क्ष}^{२}-\text{क्षय}+\text{य}^{२}}\end{array}\right\}$ उ० $\left\{\begin{array}{l}\text{क्ष}=३. \\ \text{य}=२.\end{array}\right.$

६४. $\left.\begin{array}{l}\sqrt{\text{क्ष}^{२}+\sqrt[३]{\text{क्ष}^{४}\text{य}^{२}}}+\sqrt{\text{य}^{२}+\sqrt[३]{\text{क्ष}^{२}\text{य}^{४}}}=\text{अ}. \\ \text{क्ष}+\text{य}+३\sqrt[३]{\text{बक्षय}}=\text{ब}.\end{array}\right\}$

उत्तर. $\left\{\begin{array}{l}\text{क्ष}=\frac{१}{८}\left\{\text{ब}^{\frac{१}{३}}+\sqrt{२\,\text{अ}^{\frac{२}{३}}-\text{ब}^{\frac{२}{३}}}\right\}^{३}. \\ \text{य}=\frac{१}{८}\left\{\text{ब}^{\frac{१}{३}}-\sqrt{२\,\text{अ}^{\frac{२}{३}}-\text{ब}^{\frac{२}{३}}}\right\}^{३}.\end{array}\right.$

६५. $\left.\begin{array}{l}\text{क्ष}^{२}+\text{य}^{२}=३\text{क्षय}. \\ \text{क्ष}^{५}+\text{य}^{५}=२.\end{array}\right\}$ उ० $\left\{\begin{array}{l}\text{क्ष}=\dfrac{\sqrt[५]{१०}}{२\sqrt{५}}(\sqrt{५}+१). \\ \text{य}=\dfrac{\sqrt[५]{१०}}{२\sqrt{५}}(\sqrt{५}-१).\end{array}\right.$

६६. $\left.\begin{array}{l}(\text{क्ष}+\text{य})^{३}=६४(\text{क्ष}-\text{य}). \\ (\text{क्ष}^{३}+\text{य}^{३})(\text{क्ष}+\text{य})=७६.\end{array}\right\}$ उ० $\left\{\begin{array}{l}\text{क्ष}=\frac{५}{२}. \\ \text{य}=\frac{३}{२}.\end{array}\right.$

६७. $\left.\begin{array}{l}\text{क्ष}^{४}+\text{य}^{४}=१+२\text{क्षय}+३\text{क्ष}^{२}\text{य}^{२}. \\ \text{क्ष}^{३}+\text{य}^{३}=२\text{य}^{२}\text{क्ष}+२\text{य}^{२}+\text{क्ष}+१.\end{array}\right\}$ उ० $\left\{\begin{array}{l}\text{क्ष}=२. \\ \text{य}=१.\end{array}\right.$

६८. $\left.\begin{array}{l}(\text{क्ष}^{२}+\text{क्षय}+\text{य}^{२})(\text{क्ष}^{२}-\text{क्षय}+\text{य}^{२})=४८१. \\ (\text{क्ष}^{२}+\text{य}^{२})^{२}-(\text{क्ष}^{२}+\text{य}^{२})\text{क्षय}=३२५.\end{array}\right\}$

उत्तर. क्ष = ३, य = ४.

६९. $क्ष - २\sqrt{२अय - य^{२}} = ५\sqrt{अय}.$
$क्ष^{२} - ८\sqrt{अय}\cdot क्ष = २ अय - ९ य^{२}.$

उत्तर. क्ष = ७ अ, य = अ.

७०. $क्ष^{६} + य^{६} = \frac{१}{\sqrt{२}}$
$क्ष^{४} + य^{४} = १.$
उत्तर. $क्ष = य = \frac{१}{\sqrt[४]{२}}.$

७१. $क्ष^{७} - य^{७} = १२७.$
$क्ष - य = १.$
उत्तर. क्ष = २, य = १.

७२. क्ष + य + ज्ञ = ३ अ.
$क्षय + क्षज्ञ + यज्ञ = ३ अ^{२}.$
$क्षयज्ञ = अ^{३}.$
उ० क्ष = अ. य = अ. ज्ञ = अ.

७३. क्षय = क्ष + य.
क्षज्ञ = २ (क्ष + ज्ञ)
यज्ञ = ३ (य + ज्ञ)
उत्तर. $क्ष = १\frac{५}{७}.$ $य = २\frac{२}{५}.$ ज्ञ = − १२.

७४. $क्ष^{२} + य^{२} + ज्ञ^{२} = १४.$
$क्ष^{२} + य = ३.$
$ज्ञ^{२} + य = ११$
उत्तर. क्ष = ± १. य = २ ज्ञ = ± ३.

७५. क्षय + ज्ञ = ५.
क्षयज्ञ = ४.
$२ (क्ष^{२} - य) = (य^{२} - क्ष^{२})^{२}.$
उत्तर. क्ष=२,१. य=२,१. ज्ञ=१,४.

७६. $क्ष^{२} + क्षय + य^{२} = १३.$
$क्ष^{२} + यज्ञ + ज्ञ^{२} = ४९.$
$क्ष^{२} + क्षज्ञ + ज्ञ^{२} = ३१.$
उत्तर. क्ष = ± १. य = ± ३. ज्ञ = ± ५.

७७. $क्ष^{-२} य^{-१} ज्ञ = १\frac{१}{२}.$
$क्ष^{-१} य ज्ञ^{२} = १८.$
$क्ष य^{२} ज्ञ^{३} = १०८.$
उत्तर. क्ष = ± १. य = ± २. ज्ञ = ± ३.

७८. $$\left.\begin{array}{l}(२\sqrt{\text{क्ष}}+\sqrt{\text{य}})^{२}=\text{य}^{२}-४\text{क्षज्ञ}.\\ २\sqrt{\text{क्ष}}+\sqrt{\text{य}}=\dfrac{\text{क्ष}+\text{य}+\text{ज्ञ}.}{२\sqrt{\text{क्ष}}.}\\ ६\sqrt{\text{य}}=\text{क्ष}+\text{य}^{\frac{३}{४}}+\text{ज्ञ}\end{array}\right\}\text{उत्तर.}\left\{\begin{array}{l}\text{क्ष}=४.\\ \text{य}=१६.\\ \text{ज्ञ}=१२.\end{array}\right.$$

प्रश्न.

१. **अ**, लंडनाहून यार्कास यावयाकरितां निघाला, आणि त्याचवेळेस **ब**, यार्काहून लंडनास यावयाकरितां निघाला. त्या दोघांची वाटेंत गांठ पडल्यानंतर **अ** ९ तासांनीं यार्कास पोंचला, आणि **ब** १६ तासांनीं लंडनास पोंचला; तर **अ**स लंडनाहून यार्कास जावयास किती तास लागले, आणि **ब**स यार्काहून लंडनास जावयास किती तास लागले?

एकेकास त्यांची गांठ पडण्याच्या अगोदर रस्त्यावर जितके तास लागले ते = क्ष धर,

तर क्ष + ९ = **अ**चा सगळा वेळ

आणि क्ष + १६ = **ब**चा . . . .

$\text{क्ष}+९^{\text{ता.}} : \text{क्ष}^{\text{ता}} :: १^{\text{वाट}} : \dfrac{\text{क्ष}}{\text{क्ष}+९} =$ { गांठ पडण्याचे पूर्वीं **अ** जितका रस्ता चालून आला तो,

$\text{क्ष}+१६ : \text{क्ष} : १ : \dfrac{\text{क्ष}}{\text{क्ष}+१६} =$ { गांठ पडण्याचे पूर्वी **ब** जितका रस्ता चालून आला तो.

$$\text{ह्मणून, } \frac{\text{क्ष}}{\text{क्ष}+९}+\frac{\text{क्ष}}{\text{क्ष}+१६}=१;$$

$$\text{क्ष}^{२}+१६\,\text{क्ष}+\text{क्ष}^{२}+९\,\text{क्ष}=\text{क्ष}^{२}+२५\,\text{क्ष}+१४४;$$

$$\therefore \text{क्ष}^{२}=१४४,\ \text{क्ष}=१२,$$

$$\therefore \text{क्ष}+९=२१=\text{अचा वेळ},$$

$$\text{आणि क्ष}+१६=२८=\text{बचा वेळ}.$$

अथवा प्रकारांतरानें; **अ**चा सगळा वेळ = क्ष घे,

आणि बचा . . . . = य . .

क्ष : ९ : : १ : $\frac{९}{य}$ = गांठ पडल्यावर अ जितका रस्ता चालून गेला तो,

य : १६ : : १ : $\frac{१६}{य}$ = ... ब . . . . .

म्हणून, $\frac{९}{क्ष} + \frac{१६}{य} = १$, ∴ ९ य + १६ क्ष = क्षय.

परंतु क्ष = य - ७, ∴ ही किंमत पहिल्या समीकरणांत मांडल्यानें,

$$९ य + १६ य - ११२ = य^{२} - ७ य,$$

$$य^{२} - ३२ य = - ११२,$$

$$य^{२} - ३२ य + १६^{२} = २५६ - ११२ = १४४,$$

$$य - १६ = १२, ∴ य = २८ \text{ तास = बचा वेळ;}$$

$$\text{आणि } क्ष = य - ७ = २१ \text{ तास = अचा . . ..}$$

२. अ आणि ब हे दोघे एकाच वेळेस वाट चालूं लागले; अ, क कडून ड कडे जावयास निघाला, आणि ब, ड कडून क कडे यावयास निघाला; त्यांची रस्त्यावर गांठ पडली, तेव्हां असें समजून आलें कीं, अ, ब पेक्षां ३० मैल जास्ती चालला, आणि ते त्याच चालीनें पुढें चालले तर अ, डस चार दिवसांनीं पोहोंचेल, आणि ब, कस ९ दिवसांनीं पोहोंचेल; तर ड आणि क ह्यांच्या मध्यें किती अंतर होतें ?

गांठ पडण्याचे पूर्वीं अ जितका रस्ता चालून आला तो = क्ष घे, आणि ब जितका रस्ता चालून आला तो = घे.

तर क्ष = य + ३०.

आतां य मैल जमीन अ चार दिवसांत जातो,

∴ य : क्ष : : ४ : $\frac{४क्ष}{य}$ = ते भेटल्याच्या पूर्वीं जितके दिवस अ चालत होता ते.

पुन : क्ष मैल जमीन ब नऊ तासांत जातो,

$\therefore$ क्ष : य : : ९ : $\frac{९य}{क्ष}$ = ते भेटल्याच्या पूर्वी जितके दिवस ब चालत होता ते,

$$म्हणून \frac{४क्ष}{य} = \frac{९य}{क्ष};$$

$\therefore$ ४ $क्ष^२$ = ९ $य^२$, $\therefore$ २ क्ष = ३ य, $\therefore$ क्ष = $\frac{३य}{२}$,

म्हणून $\frac{३य}{२}$ = य + ३०, $\therefore$ य = ६०, आणि क्ष = ९०,

$\therefore$ क्ष + य = १५० मैल = सगळें अंतर.

३. अशा दोन संख्या कोणत्या आहेत, कीं ज्यांची वजाबाकी २ येईल, आणि ज्यांच्या गुणाकारास ज्यांच्या बेरजेनें गुणिलें असतां गुणाकार १२ येईल.

मोठी संख्या = क्ष घे, आणि धाकटी = य घे.

तर क्ष - य = २, म्हणजे य = क्ष - २,

आणि क्षय (क्ष + य) = १२, म्हणजे $क्ष^२$य + क्ष$य^२$ = १२;

$क्ष^२$ (क्ष - २) + क्ष $(क्ष-२)^२$ = १२,

$क्ष^३$ - २ $क्ष^२$ + $क्ष^३$ - ४ $क्ष^२$ + ४ क्ष = १२,

२ $क्ष^३$ - ६ $क्ष^२$ + ४ क्ष - १२ = ०,

२ $क्ष^२$ (क्ष - ३) + ४ (क्ष - ३) = ०,

$\therefore$ क्ष = ३, आणि य = १.

४. अशा दोन संख्या काढ, कीं ज्यांच्या बेरजेस त्यांच्याच घनांच्या बेरजेनें गुणिलें असतां गुणाकार ११२ होईल, आणि त्यांच्या बेरजेचा घन त्यांच्या वजाबाकीस : : ३२ : १ होईल.

मोठी संख्या = क्ष घे, आणि धाकटी = य घे,

तर (क्ष + य) ($क्ष^३$ + $य^३$) = ११२,

आणि $(क्ष + य)^{२} : (क्ष - य) : : ३२ : १,$

$(क्ष + य)^{४} : (क्ष^{२} - य^{२}) : : ३२ : १,$ अथवा

$$क्ष^{४} + ४ क्ष^{३}य + ६ क्ष^{२}य^{२} + ४ क्षय^{३} + य^{४} = ३२ (क्ष^{२} - य^{२}),$$

$$४ क्ष^{४} + ४ क्ष^{३}य \quad + ४ क्ष य^{३} + ४ य^{४} = ४४८$$

$$३ क्ष^{४} - ६ क्ष^{२}य^{२} + ३ य^{४} = ४४८ - ३२ (क्ष^{२} - य^{२})$$

$$क्ष^{४} - २ क्ष^{२}य^{२} + य^{४} + \frac{३२}{३} (क्ष^{२} - य^{२}) = \frac{४४८}{३},$$

$$(क्ष^{२} - य^{२})^{२} + \frac{३२}{३} (क्ष^{२} - य^{२}) + \overline{\frac{१६}{३}}\Big|^{२} = \frac{२५६}{९} + \frac{१३४४}{९} = \frac{१६००}{९},$$

$$क्ष^{२} - य^{२} + \frac{१६}{३} = \frac{४०}{३}, \; क्ष^{२} - य^{२} = \frac{२४}{३} = ८ ,$$

$$\therefore (क्ष + य)^{४} = ३२ (क्ष^{२} - य^{२}) = २५६,$$

$$क्ष + य = ४, \; क्ष - य = २,$$

$$\therefore क्ष = ३, \; य = १.$$

ज्यांपासून समीकरणें उत्पन्न होतात असे प्रश्न.

१. अशा दोन संख्या काढ, कीं त्यांची वजाबाकी ८ होईल, आणि त्यांचा गुणाकार १२८ होईल.

उत्तर. ± ८ आणि ± १६.

२. अशा दोन संख्या काढ, कीं त्यांची बेरीज ४० होईल, आणि त्यांच्या वर्गांची बेरीज ८१८ होईल.

उत्तर. २३, आणि १७.

३. अशी संख्या कोणती आहे, कीं जी आपल्या व्युत्क्रमापेक्षां एकानें जास्त आहे.

उत्तर. $\frac{१}{२} (१ \pm \sqrt{५}).$

४. एका मनुष्यानें ६० पौंडांस जितकीं मेंढरें आलीं तितकीं विकत घेतलीं, आणि त्यांपैकीं १५ ठेवून बाकीचीं ५४ पौंडांस विकलीं आणि त्या व्यापारांत त्यास एकेका मेंढरास दोन दोन शिलिंग मिळाले; तर त्यानें किती मेंढरें विकत घेतलीं होतीं ? उत्तर. ७५.

५. अ, ब, आणि क हे तिघे मिळून कांहीं एक काम कांहीं तासांत करतात; अच जर तें काम एकटा करूं लागता तर त्यास पूर्वींचेपेक्षां ६ तास जास्ती लागते, बस १५ तास जास्ती लागते, आणि कस दुप्पट तास लागते; तर त्या तिघांनीं किती तासांत तें काम संपविलें ?

उत्तर. ३ तास.

६. एका वर्तुळाकृति मैदानांत **अब** आणि **कड** असे दोन रस्ते गेले आहेत. त्यांत **अब** रस्ता **कड** रस्त्याचे **ई** बिंदूंत दोनसारखे विभाग करितो, **अई** = २५ फूट, आणि **बई** = $\frac{४}{५}$ **कड** - १६ फूट; तर **कड**ची लांबी किती आहे ?

उत्तर. ४० फूट.

७. एका मनुष्यानें २४० रुपयांस कांहीं बैल विकत घेतले, पुढें त्यांपैकीं तीन गमावल्यावर बाकीचे बैल एकेका बैलास मूळ किंमतीपेक्षां ८ रुपये नफा घेऊन विकले, तेव्हां त्या व्यापारांत त्यास ५९ रुपये एकंदर नफा झाला; तर त्यानें किती बैल विकत घेतले होते ? उत्तर. १६ बैल.

८. कांहीं मनुष्यें दारू पिण्याकरितां एका कलालाचें दुकानीं गेलीं; आणि दारू प्याल्यानंतर पाहातात तों आपणांकडे दुकानदाराचे ३ पौंड १२ शिलिंग झाले, पण त्या मंडळींतून दोन मनुष्यांजवळ पैसा नव्हता म्हणून बाकीच्यांतील एकेकास ६ पेन्स जास्ती आवे लागले; तर कलालाचे दुकानीं किती मनुष्यें गेलीं होतीं.

उत्तर. १८ मनुष्यें.

९. एक काटकोन चौकोनाकृति शेत होतें, त्याची लांबी, रुंदीपेक्षां १० यार्डांनीं जास्ती होती, आणि त्याचें क्षेत्रफळ ३००० चौरस यार्ड होतें; तर त्याची लांबी आणि रुंदी किती किती यार्ड होती ?

उत्तर. ६० यार्ड आणि ५० यार्ड.

१०. अ आणि ब ह्या दोघां सरकऱ्यांस व्यापारांत १८ पौंड नफा झाला; बनें आपले ३० पौंड १६ महिनेपर्यंत व्यापारांत ठेविले होते, आणि अनें आपला पैसा १२ महिनेपर्यंत ठेविला होता आणि बारामहिन्याचे अंतीं त्यास नफा व मुद्दल मिळून २६ पौंड आले; तर अनें व्यापारांत किती पैसा घातला होता ? उत्तर. २०पौंड.

११. चौरस फूट अशा दगडांनीं बांधलेल्या दोन चौरस फरसबंद्या आहेत, त्यांपैकीं एकीची बाजू दुसरीचे बाजूपेक्षां १२ फूट अधिक आहे, आणि त्या दोन्ही फरसबंद्यांस मिळून २१२० दगड लागतात; तर एकेकीच्या बाजूची लांबी किती होती ?

उत्तर. २६ फूट, आणि ३८ फूट.

१२. एकानें आपला घोडा ५६ रुपयांस विकला, तेव्हां त्यास मूळ किमतीइतका दरशेंकडा नफा झाला; तर त्यानें घोडा केवढ्याला घेतला होता ?

उत्तर. ४० रुपये.

१३. दोन संख्यांची वजाबाकी ६ आहे आणि त्यांच्या वर्गांच्या बेरजेस त्यांच्या गुणाकारानें गुणलें असतां गुणाकार ४६४० आहे; तर त्या दोन संख्या काढ.

उत्तर. १०, आणि ४.

१४. १५० मैलांवर एक गांव आहे, त्या गांवास जाण्याकरितां अ आणि ब हे दोघे एकाच वेळेस निघतात; परंतु बपेक्षां अ दरतासास ३ मैल जास्ती चालतो, म्हणून तो त्याच्या अगोदर ८ $\frac{१}{३}$ तास त्या गांवीं पोंहचतो, तर दरतासास एकेक किती मैल चालतो ? उत्तर. अ, ९; आणि ब, ६.

१५. एका गड्याचे हाताखालीं एक मुलगा जर ६ तास दिला तर तो कांहीं एक काम १० तासांत संपवितो; परंतु मुलाला जर १० तास काम करायाला लाविलें आणि गड्याला ६च तास लाविलें, तर त्या कामाचे $\frac{२}{३}$ मात्र काम होतें; आतां गडी मुलापेक्षां ५ तास जास्ती खपतो आहे, तर त्या दोघांस तें काम संपिण्यास किती वेळ लागेल ?

उत्तर, गडी, १०$\frac{१}{१०}$ तास; आणि मुलगा, ५$\frac{१}{१०}$ तास.

१६. कोणीएक नावाडी १० तासांत २० मैलांवर होडी नेऊन परत आणतो, आणि हें कृत्य केल्यावरून त्यास असें कळून येतें, कीं पाठीवरची भरती असतां ३ मैल जाण्यास जितका वेळ लागतो तितकाच वेळ समोरची भरती असतां २ मैल यावयास लागतो; तर त्या पाण्याचा जोर किती आहे, आणि त्यास जाण्यास आणि येण्यास किती वेळ लागतो ?

उत्तर. { दरतासांत $\frac{५}{६}$ मैल, आणि जाण्याचा वेळ ४ तास, आणि येण्याचा वेळ ६ तास.

१७. एका पोकळ सम बाजू त्रिकोणाकृतींत तीन तीन रांगा धरून उभी राहण्यापुरती फौज आहे, आणि जर त्यांतून ५९७ मनुष्यें काढून टाकिलीं तर बाकीच्या मनुष्यांनीं चार चार रांगांचें एक पोकळ चौरस होईल, ज्या चौरसाच्या पुढल्या एका रांगेतील मनुष्यसंख्या त्रिकोणाच्या पुढल्या एका रांगेतील मनुष्यसंख्येचे वर्गमूळाहून एकानें अधिक आहे; तर त्या फौजेंत किती मनुष्यें आहेत ?

उत्तर. ६९३ मनुष्यें.

१८. १०० पौंड भांडवल घेऊन दोन सावकारांनीं सरकतीनें व्यापार आरंभिला; एकानें आपला पैसा तीन महिने व्यापारांत ठेविला, आणि दुसऱ्यानें २च महिने ठेविला; आणि एकेकास नफा व मुद्दल मिळून ९९ पौंड आले; तर एकेकाचा पैसा किती किती होता ?

उत्तर. ४५ पौंड, आणि ५५ पौंड.

१९. पायदळाच्या दोन तुकड्यांस ३९ मैलांवर जाऊन छावणी करण्याच्या हुकूम झाला; त्या दोन्ही तुकड्यांनीं एकाच वेळेस कूच केलें, परंतु एक दुसरीपेक्षां $\frac{1}{4}$ मैल दरतासास जास्ती चालली, ह्मणून ती एक तास अगोदर जाऊन पोंहोचली; तर एकेक तुकडी दरतासांत किती मैल चालली ?

उत्तर. दरतासांत अनुक्रमें ३ आणि ३$\frac{1}{4}$ मैल.

२०. एका कलालानें क्लारेट दारूचे १२ डजन आणि शेरी दारूचे ७ डजन ५० पौंडांस विकले; त्यानें ६ पौंडांस जितके डजन क्लारेटदारूचे विकले त्यापेक्षां १० पौंडांस शेरीदारूचे ३ डजन जास्ती विकले; तर प्रत्येक दारवेच्या प्रत्येक डजनास काय पडलें ?

उ० शेरीच्या दरडजनास २ पौंड, आणि क्लारेटच्यास ३ पौंड.

२१. काटकोन चौकोन बांधून उभ्या राहिलेल्या सैन्याच्या अ आणि ब ह्या दोन तुकडयांतील प्रत्येकींत जेव्हां समोरल्या रांगेतील मनुष्यां इतकींच बाजूचे रांगेत होतीं, तेव्हां त्या दोन्हींच्या समोरच्या रांगांतील एकंदर मनुष्यें ८४ होतीं; पण जेव्हां अच्या समोरल्या रांगेतील मनुष्यांइतकीं बचे समोरील रांगेंत, आणि बच्या समोरील रांगेतील मनुष्यांइतकीं अचे समोरील रांगेंत मनुष्यें ठेवलीं, तेव्हां दोघांच्या बाजूंचे रांगांतील एकंदर मनुष्यें ९१ होतीं; तर प्रत्येक तुकडींत किती किती मनुष्यें होतीं.

उत्तर. २३०४, आणि १२९६.

२२. अ आणि ब ह्या दोघांनीं मिळून सरकतीनें व्यापार आरंभिला; कांहीं दिवसांनीं अनें आपला हिस्सा ११ पौंडांस विकला, त्यांत त्याला बच्या हिशा इतका दरशेंकडा नफा झाला; बस ३६ पौंड नफा झाला, आणि तेव्हां असें दिसून आलें कीं बस जितका दरशेंकडा नफा पडला त्याच्या चौपट अस दरशेंकडा पडला; तर एकेकानें किती किती पौंड व्यापारांत घातले होते.

उत्तर. अचा पैसा ५ पौंड, आणि बचा १२० पौंड.

२३. सैन्याची एक तुकडी काटकोन चौकोन बांधून मजलदरमजल चालली होती, तेव्हां तिचे समोरल्या रांगेतील माणसांपेक्षां बाजूच्या रांगेत पांच माणसें ज्यास्ती होतीं; परंतु जेव्हां शत्रु दिसूं लागला तेव्हां पाठीमागील मनुष्यें घेऊन समोरल्या रांगेत ८४५ मनुष्यें जास्ती उभीं केलीं, ह्मणून त्यांत पांचच रांगा झाल्या; तर त्या तुकडींत किती मनुष्यें होतीं .

. उत्तर. ४५५० मनुष्यें.

२४. एका द्राक्षांचे दारूच्या आणि सिदरदारूच्या मिश्रणांत द्राक्षांची दारू त्या मिश्रणाचे अर्धाहून २५ शेर अधिक होती, आणि सिदरदारू त्या मिश्रणाचे तृतीयांशाहून पांच शेर कमी होती; तर त्या मिश्रणांत एकेक दारवेचे किती किती शेर होते ?

उत्तर. { द्राक्षांच्या दारूचे ८५ शेर, आणि
सिदर दारूचे ३५ शेर.

२५. एका काटकोन त्रिकोणांत पायाची आणि कर्णाची वजाबाकी ६ आहे, आणि लंबाची आणि कर्णाची वजाबाकी ३ आहे; तर त्या त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजू काय आहेत ?

उत्तर. १५, १२, आणि ९.

२६. दोन आंकड्यांची अशी संख्या कोणती आहे, कीं जीस तिचे डावे हातचे आंकड्यानें गुणिलें असतां गुणाकार ४६ येईल, आणि त्या दोन आंकड्यांच्या बेरजेस त्याच आंकड्यानें गुणिलें असतां गुणाकार १० येईल. उत्तर. २३.

२७. अ आणि ब ह्यांस सरकतीच्या व्यापारांत १०० पौंड नफा झाला; अ चें अर्धे भांडवल ब च्या भांडवलापेक्षां १०० पौंड कमी होतें, आणि अस ब च्या भांडवलाचे $\frac{३}{२०}$ सांश इतका नफा झाला; तर एकेकाचें भांडवल किती किती होतें आणि एकेकास किती किती नफा झाला ?

उत्तर. { अचें भांडवल ६००, आणि बचें ४०० पौंड.
अचा नफा ६०, आणि बचा ४० पौंड. }

२८. ३२० मैल अंतरावरील दोन गांवांहून दोन मित्र अ आणि ब एकमेकास भेटावयास एकाच काळीं निघाले; अ, बपेक्षां ८ मैल दररोज अधिक चालला, आणि ब एके दिवसांत जितके मैल चालला त्याच्या अर्धे दिवस एकमेकाची गांठ पडावयास लागले; तर एकेक दररोज किती मैल चालला, आणि एकंदर किती मैल चालला ?

उत्तर. { दररोज अ २४ मैल, ब १६ मैल गेला; अ एकंदर १९२ मैल, ब १२८ मैल गेला. }

२९. दोन चौकोनी भांडीं आहेत, त्यांपैकीं मोठ्याचें घनफळ धाकट्याचे घनफळापेक्षां २० घनफुटांनीं अधिक आहे. भांड्यांचीं बुडें चौरस आहेत, व प्रत्येक भांड्याच्या बुडाची लांबी दुसऱ्या भांड्याच्या उंची इतकी आहे, आणि त्यांचीं सांठवणें ४ : ५ ह्या प्रमाणांत आहेत; तर एकेका भांड्याची उंची किती आहे ? उत्तर. ५ फूट, आणि ४ फूट.

३०. अ, ब, आणि क हे तीन मित्र आपापसांत कांहीं पैसा वांटून घेतात; अ आपणास सगळ्या पैशाचा नवा भाग आणि $\frac{अ}{न}$ इतकें घेतो, ब बाकीच्या पैशाचा नवा भाग आणि $\frac{अ}{न}$ इतकें घेतो, आणि क शेष उरलेल्या पैशाचा नवा भाग आणि $\frac{अ}{न}$ इतकें घेतो; आणि शेवटीं पाहातात तों कांहींच पैसा उरत नाहीं; तर तो पैसा किती आहे ?

उत्तर. $\frac{३न^२ - ३ न + १}{(न - १)^२} \times अ$ पौंड.

३१. दोन गांवांचेमध्यें अंतर अ मैल आहे, एकेगांवाहून एक मनुष्य निघाला, तो पहिल्या दिवशीं सगळ्या रस्त्याचा म

वा भाग चालून गेला, दुसरे दिवशीं बाकीच्या रस्त्याचा मवा भाग चालून गेला, मग पुढें शेष रस्त्याचे मवा आणि नवा भाग असा एकेक दिवसा आड चालत गेला, तर तो २प दिवसांत किती मैल लांब गेला ?

$$\text{उत्तर. अ} \left\{ १ - \left(१ - \frac{१}{म}\right)^{प} \left(१ - \frac{१}{म}\right)^{प} \right\}$$

प्रकरण ७.

असमपदें, गुणोत्तर, प्रमाण, आणि विकार.

(१८). असमपदें > ह्याहून जास्ती, किंवा < ह्याहून कमी, ह्या चिन्हानें दाखवितात. जसें, ५ > ३, ३ < ५, आणि अ > ब, हीं असमपदें आहेत. जेव्हां सर्व पदांचीं चिन्हें बदलतात तेव्हां > ह्या चिन्हाचें < हें चिन्ह होतें, आणि < ह्याचिन्हाचें > हें चिन्ह होतें, एवढी गोष्ट शिवाय करून असमपदांचीं उदाहरणें समीकरणांप्रमाणेंच करतां येतात; आणि ह्या अपवादाचें कारण असें आहे, कीं जरी अ > ब असला तरी – अ > – ब असेलच असा नियम नाहीं, ह्यास उदाहरण, ५ > ३, परंतु – ५ < – ३.

उदाहरणें.

१. म आणि न हीं दोन असमपदें आहेत असें मान, तर $म^{२} + न^{२} > २\,मन$.

कांकीं ∵ कोणतेंही वर्गपद ऋण असावयाचें नाहीं, ∴ $(म - न)^{२}$ ह्मणजे $म^{२} + न^{२} - २\,मन$, हें पद धन आहे,

∴ ह्या पदांमधील धन भाग > ऋण भाग; ह्मणजे

$$म^{२} + न^{२} > २\,म\,न.$$

२. असें सिद्ध कर कीं, $\sqrt{११} + \sqrt{७} > \sqrt{१९} + \sqrt{२}$.

ज्याप्रमाणें, $\sqrt{११}+\sqrt{७}$ > किंवा < $\sqrt{१९}+\sqrt{२}$,

त्याप्रमाणें, $(\sqrt{११}+\sqrt{७})^{२}$ > किंवा < $(\sqrt{१९}+\sqrt{२})^{२}$,

ह्मणजे, $१८+२\sqrt{७७}$ > किंवा < $२१+२\sqrt{३८}$,

$२\sqrt{७७}$ > किंवा < $३+२\sqrt{३८}$, ∵ प्रत्येक बाजूंत १८ वजा केल्यानें,

∴ ३०८ > किंवा < $१६१+१२\sqrt{३८}$, ∵ प्रत्येक बाजूचा वर्ग केल्यानें,

∴ १४७ > किंवा < $१२\sqrt{३८}$, ∵ प्रत्येक बाजूंत १६१ वजा केल्यानें,

आतां हें उघड आहे कीं, १४७ हे $१२\sqrt{३८}$ ह्यांपेक्षां अधिक आहेत;

∴ $\sqrt{११} + \sqrt{७}$ हे $\sqrt{१९} + \sqrt{२}$ ह्यांपेक्षां अधिक आहेत.

३. असें सिद्ध कर कीं, अपूर्णपद + त्याचा व्युत्क्रम > २.

$\frac{म}{न}$ हें अपूर्णपद घे, तर $\frac{न}{म}$ हें त्याचा व्युत्क्रम आहे.

आतां ज्याप्रमाणें $\frac{म}{न}+\frac{न}{म}$ > किंवा < २,

त्याप्रमाणें $\left(\frac{म}{न}+\frac{न}{म}\right)^{२}$ > किंवा < $२^{२}$,

ह्मणजे, $\frac{म^{२}}{न^{२}} + २ + \frac{न^{२}}{म^{२}}$ > किंवा < ४,

$\frac{म^{२}}{न^{२}} + \frac{न^{२}}{म^{२}}$ > किंवा < २, ∵ २ वजा केल्यानें,

परंतु ∵ $२\,\frac{म}{न}\cdot\frac{न}{म} = २$, ∴ $\frac{म^{२}}{न^{२}} = \frac{न^{२}}{म^{२}} > २$, (१ उदा०)

∴ $\frac{म}{न}+\frac{न}{म} > २$.

४. जर, $\text{य} = १ + ४\,\text{क्ष} - \text{क्ष}^२$, तर क्षची कोणती किंमत धरली असतां य अतिमोठा होईल.

$$\text{क्ष}^२ - ४\,\text{क्ष} = १ - \text{य},\ \text{क्ष}^२ - ४\,\text{क्ष} + ४ = ५ - \text{य},$$

$$\therefore \text{क्ष} - २ = \pm\sqrt{५-\text{य}},\ \therefore \text{क्ष} = २ \pm \sqrt{५-\text{य}}.$$

उत्तर. $\text{क्ष} = २$ असलें पाहिजेत, आणि मग $\text{य} = ५$ होतील; कांकीं, जेव्हां $\text{य} > ५$, तेव्हां वर काढलेली क्षची किंमत, म्हणजे $२ \pm \sqrt{५-\text{य}}$, ही कल्पित होतें; आणि जेव्हां यची किंमत $= ५$ आहे, तेव्हां $\pm\sqrt{५-\text{य}}$ हें पद शून्य होतें. आणि $\text{क्ष} = २$.

५. $\sqrt{७} + \sqrt{१०}$, आणि $\sqrt{३} + \sqrt{१९}$, ह्या दोन पदांत कोणतें मोठें आहे? उत्तर. $\sqrt{३} + \sqrt{१९}$.

६. $४\,\text{क्ष} - ७ < २\,\text{क्ष} + ३$, आणि $३\,\text{क्ष} + १ > १३ - \text{क्ष}$, } तर क्षची पूर्णांक किंमत काढ.

उत्तर. $\text{क्ष} = ४$.

७. असें सिद्ध कर कीं $\dfrac{\text{अ} + \text{ब}}{२} > \dfrac{२\,\text{अ}\,\text{ब}}{\text{अ} + \text{ब}}$, आणि $\text{अ}^५ + \text{ब}^५ > \text{अ}^४\,\text{ब} + \text{अ}\,\text{ब}^४$.

८. असें सिद्ध कर कीं $\dfrac{\text{न}^२ - \text{न} + १}{\text{न}^२ + \text{न} + १}$ ह्या पदाची किंमत, नची कोणतीही किंमत असली तरी, ३ आणि $\frac{१}{३}$ ह्यांच्यामध्यें आहे.

गुणोत्तर.

(१९). दोन पदांच्या किंवा दोन संख्यांच्या मध्यें महत्त्व मूलक जो संबंध असतो त्यास गुणोत्तर ह्मणतात; जसें १२ हे ४ ह्यांचे तिप्पट आहेत, आणि १२ ह्यांचे ४ ह्यांशीं जें गुणोत्तर तें ३ आहे हें गुणोत्तर लिहिण्याची रीति १२ : ४ अशी

आहे; गुणोत्तराचा पहिला अवयव १२ ह्यास अग्रसर म्हणतात, आणि दुसरा अवयव ४ ह्यास उपाग्रसर म्हणतात.

हें गुणोत्तर $\frac{१२}{४}$ ह्या अपूर्णांकानें ही दाखवितां येईल ∵ $\frac{१२}{४} = ३$.

ह्या प्रमाणेंच १२ : ३६ हें गुणोत्तर = $\frac{१२}{३६} = \frac{१}{३}$ आणि सामान्यें करून अ: ब ह्या गुणोत्तराची किंमत $\frac{अ}{ब}$ ह्या अपूर्णपदानें दाखवितां येईल.

एकाच पदानें गुणोत्तराच्या दोन्ही पदांस गुणिलें अथवा भागिलें तर त्याची किंमत बदलत नाहीं. कांकीं, अ : ब = $\frac{अ}{ब} = \frac{नअ}{नब}$, ∴ अ : ब = न अ : नब.

गुणोत्तरांत अग्रसर उपाग्रसरापेक्षां अधिक किंवा कमी किंवा त्याबराबर असेल, त्याप्रमाणें त्यास अधिक असाम्याचें, कमी असाम्याचें, किंवा साम्याचें गुणोत्तर ह्मणतात.

एकचपद अधिक असाम्याच्या गुणोत्तराच्या दोन्ही पदांत मिळविलें तर तें गुणोत्तर कमी होतें, आणि कमी असाम्याच्या गुणोत्तराच्या दोन्ही पदांत मिळविलें तें तर गुणोत्तर अधिक होतें.

जर अ : ब हें एक मूळचें गुणोत्तर घेऊन त्याचे दोन्ही पदांत क्ष मिळविला, तर अ + क्ष : ब + क्ष हें नवें गुणोत्तर होईल.

∴ ज्याप्रमाणें $\frac{अब+बक्ष}{ब(ब+क्ष)} >$ किंवा $< \frac{अब+अक्ष}{ब(ब+क्ष)}$, ∵ दोनही गुणोत्तरांस समच्छेद केल्यानें,

त्याप्रमाणें $\frac{अ+क्ष}{ब+क्ष} >$ किंवा $< \frac{अ}{ब}$,

∴ ज्याप्रमाणें अब + बक्ष > किंवा < अब + अक्ष,

अथवा, बक्ष > किंवा < अक्ष,

अथवा, ब > किंवा < अ, (१८ कलमाप्रमाणें.)

त्याप्रमाणें, $\frac{अ+क्ष}{ब+क्ष}$ > किंवा < $\frac{अ}{ब}$; ह्मणजे,

जर अ > ब, तर $\frac{अ+क्ष}{ब+क्ष}$ < $\frac{अ}{ब}$, ह्मणजे तें गुणोत्तर कमी झालें;

जर अ < ब, तर $\frac{अ+क्ष}{ब+क्ष}$ > $\frac{अ}{ब}$, ह्मणजे तें गुणोत्तर वाढलें.

एकच पद अधिक असाम्याच्या गुणोत्तराच्या दोन्ही पदांतून वजा केलें तर तें गुणोत्तर अधिक होतें, आणि कमी असाम्याच्या गुणोत्तराच्या दोन्ही पदांतून वजा केलें तर तें गुणोत्तर कमी होतें.

अ आणि ब ह्या दोन्ही पदांपेक्षां कमी जें पद क्ष तें त्या प्रत्येकांतून वजा केलें तर पहिलें गुणोत्तर = $\frac{अ}{ब}$;

आणि नवें गुणोत्तर = $\frac{अ-क्ष}{ब-क्ष}$;

ज्याप्रमाणें $\frac{अब-बक्ष}{ब(ब-क्ष)}$ > किंवा < $\frac{अब-अक्ष}{(ब-क्ष)ब}$;

ह्मणजे अब - बक्ष > किंवा < अब - अक्ष, ····(१)

त्याप्रमाणें $\frac{अ-क्ष}{ब-क्ष}$ > किंवा < $\frac{अ}{ब}$;

(१) ह्या असाम्यांतील ऋण पदें उडविण्याकरितां त्यांत अक्ष + बक्ष मिळीव, ह्मणजे

असें अब - बक्ष + अक्ष + बक्ष > किंवा

< अब - अक्ष + अक्ष + बक्ष,

अथवा अब + अक्ष $>$ किंवा $<$ अब + बक्ष,

अथवा अक्ष $>$ किंवा $<$ बक्ष; अथवा अ $>$ किंवा $<$ ब,

तसें $\frac{\text{अ-क्ष}}{\text{ब-क्ष}} >$ किंवा $< \frac{\text{अ}}{\text{ब}}$, हें मागल्याचे उलट आहे; ह्मणजे,

जर अ $>$ ब, तर $\frac{\text{अ-क्ष}}{\text{ब-क्ष}} < \frac{\text{अ}}{\text{ब}}$, ह्मणजे गुणोत्तर वाढलें,

जर अ $<$ ब, तर $\frac{\text{अ-क्ष}}{\text{ब-क्ष}} < \frac{\text{अ}}{\text{ब}}$, ह्मणजे गुणोत्तर कमी झालें.

अ : ब आणि क : ड ह्या दोन गुणोत्तरांच्या अग्रसरांचा आणि उपाग्रसरांचा परस्पर गुणाकार घेतला तर, आलेल्या अक : बड ह्या नवीन गुणोत्तरास पहिल्या दोन गुणोत्तरांचें संयुक्तगुणोत्तर म्हणतात.

$\text{अ}^2 : \text{ब}^2$ ह्या गुणोत्तरास अ : ब ह्या गुणोत्तराचा वर्ग म्हणतात.

$\sqrt{\text{अ}} : \sqrt{\text{ब}}$ . . . . वर्गमूळ. . . .

$\text{अ}^3 : \text{ब}^3$ . . . . घन. . . . . .

$\sqrt[3]{\text{अ}} : \sqrt[3]{\text{ब}}$ . . . . घनमूळ . . .

इत्यादि. इत्यादि.

प्रमाण.

(२०). ज्यांचीं गुणोत्तरें बराबर असतात तीं पदें प्रमाणांत असतात. म्हणजे जर अ : ब हें गुणोत्तर क : ड ह्या ह्या गुणोत्तराबरावर आहे, म्हणजे $\frac{\text{अ}}{\text{ब}} = \frac{\text{क}}{\text{ड}}$ तर अ, ब, क, आणि ड हीं चार पदें प्रमाणांत आहेत असें म्हणतात; आणि अ : ब : : क : ड, अथवा अ : ब = क : ड ह्यास प्रमाण म्हणतात.

सिद्धांत.

१. जर चार पदें प्रमाणांत आहेत; तर आद्यंतपदांचा गुणाकार मध्यपदांच्या गुणाकाराबरोबर आहे.

अ : ब : : क : ड हें एक प्रमाण घे, तर $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$, आणि ह्या समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंस ड ब नें गुणल्यानें, अ ड = क ब.

कुरल० १ जर अ: ब: : ब: क, तर $ब^2$ = अ क, आणि ब = $\sqrt{अक}$, ह्यांत ब ह्यास अ आणि क ह्यांचें मध्यप्रमाण म्हणतात. ह्यावरून हें सिद्ध होतें कीं, कोणत्याही दोन पदांचें मध्यप्रमाण त्या दोन पदांचे गुणाकाराचे वर्गमूळाबरोबर असतें.

कुर० २. ∵ अड = बक, ∴ अ = $\frac{बक}{ड}$, ब = $\frac{अड}{क}$, क = $\frac{अड}{ब}$, ड = $\frac{बक}{अ}$; ह्यावरून असें सिद्ध होतें, कीं जर प्रमाणांतील तीन पदें दिलीं आहेत तर, चवथें पद काढतां येईल. पूर्णांकांतील त्रैराशिकाची रीति ह्यावरूनच निघाली आहे.

२. जर दोन पदांचा गुणाकार दुसऱ्या दोन पदांच्या गुणाकाराबरोबर आहे, तर एके गुणाकाराचे अवयव आद्यंत पदें केलीं, आणि दुसरे गुणाकाराचे अवयव मध्यपदें केलीं तर तीं चार पदें प्रमाणांत होतील.

नक्ष = मय घे, तर प्रत्येक बाजूस नय नें भागल्यानें,

$\frac{क्ष}{य} = \frac{म}{न}$, ∴ क्ष : य : : म : न.

३. जर अ : ब : : क : ड, आणि क : ड : : म : न, तर अ : ब : : म : न. (युक्लिड, ५ वें बूक, सिद्धांत ४.)

$$\text{कारण } \frac{\text{अ}}{\text{ब}} = \frac{\text{क}}{\text{ड}}, \text{आणि } \frac{\text{क}}{\text{ड}} = \frac{\text{म}}{\text{न}}, \therefore \frac{\text{अ}}{\text{ब}} = \frac{\text{म}}{\text{न}},$$

$$\therefore \text{अ : ब : : म : न.}$$

४. जर अ : ब : : क : ड, तर ब : अ : : ड : क. (युक्लिड, ५ वें बूक, सिद्धांत ६.)

$$\text{कारण, } \frac{\text{अ}}{\text{ब}} = \frac{\text{क}}{\text{ड}}, \therefore \frac{\text{ब}}{\text{अ}} = \frac{\text{ड}}{\text{क}} \therefore \text{ब : अ : : ड : क}$$

ह्या कल्यास व्यस्तीकरण ह्मणतात.

५. अ : ब : : क : ड, तर अ : क : : ब : ड. (युक्लिड, ५ वें बूक, सिद्धांत ५.)

$$\text{कारण } \frac{\text{अ}}{\text{ब}} = \frac{\text{क}}{\text{ड}}, \text{ आणि } \frac{\text{ब}}{\text{क}} \text{ नें गुणिल्यानें,}$$

$$\frac{\text{अ}}{\text{क}} = \frac{\text{ब}}{\text{ड}}, \therefore \text{अ : क : : ब : ड.}$$

ह्यास परावर्तन ह्मणतात.

६. जर अ : ब : : क : ड, तर अ + ब : ब : : क + ड : ड. (युक्लिड, ५ वें बूक, सिद्धांत ७.)

$$\text{कारण } \frac{\text{अ}}{\text{ब}} = \frac{\text{क}}{\text{ड}}, \text{ आणि प्रत्येक बाजूंत १ मिळविल्यानें,}$$

$$\frac{\text{अ}}{\text{ब}} + 1 = \frac{\text{क}}{\text{ड}} + 1, \therefore \frac{\text{अ+ब}}{\text{ब}} = \frac{\text{क+ड}}{\text{ड}},$$

$$\therefore \text{अ + ब : ब : : क + ड : ड.}$$

ह्यास मिश्रीकरण ह्मणतात.

७. जर अ : ब : : क : ड, तर अ - ब : ब : : क - ड : ड. (युक्लिड, ५ वें बूक, सिद्धांत ८.)

कारण $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$, $\therefore \frac{अ}{ब} - १ = \frac{क}{ड} - १$,

$\therefore \frac{अ-ब}{ब} = \frac{क-ड}{ड}$, $\therefore$ अ - ब : ब : : क - ड : ड.

ह्यास विभागकरण ह्मणतात.

८. जर अ : ब : : क : ड, तर अ - ब : अ : : क - ड : ड, आणि अ : अ - ब : : क : क - ड. (युक्लिड, ५ वें बूक, सिद्धांत ९.

कारण ७ सि० म० $\frac{अ-ब}{ब} = \frac{क-ड}{ड}$,

आणि ४ सि० म० $\frac{ब}{अ} = \frac{ड}{क}$,

$\therefore \frac{अ-ब}{ब} \times \frac{ब}{अ} = \frac{क-ड}{ड} \times \frac{ड}{क}$,

$\frac{अ-ब}{अ} = \frac{क-ड}{क}$, $\therefore$ अ - ब : अ : : क - ड : क,

आणि अ : अ - ब : : क : क - ड, $\because$ व्यस्तीकरणानें.

९. जर अ : ब : : क : ड, तर

अ + ब : अ - ब : : क + ड : क - ड, (युक्लिड, ५ वें बूक, सिद्धांत ८ कुरल ०)

कारण $\frac{अ+ब}{ब} = \frac{क+ड}{ड}$, $\because$ ६ सि० म०

आणि $\frac{अ-ब}{ब} = \frac{क-ड}{ड}$, $\because$ ७ सि० म०

$\therefore \frac{अ+ब}{ब} \div \frac{अ-ब}{ब} = \frac{क+ड}{ड} \div \frac{क-ड}{ड}$

$\therefore \frac{अ+ब}{अ-ब} = \frac{क+ड}{क-ड}$, $\therefore$ अ+ब : अ-ब : : क+ड:क-ड.

१०. जर अ : ब : : क : ड : : इ : फ, तर

अ : ब : : अ + क + इ + इ० : ब + ड + फ + इ० (युक्लिड, ५ वें बूक, सिद्धांत १४.)

$\therefore \frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$, $\because$ अड=बक, $\because \frac{अ}{ब} = \frac{इ}{फ}$; $\therefore$ अफ = ब इ, आणि अब=अब.

$\therefore$ बेरजेनें, अब + अड + अफ = अब + बक + बइ,

$\therefore$ अ (ब + ड + फ) = ब (अ + क + इ),

$\therefore$ (२ सि० म०), अ : ब : : अ+क+इ : ब+ड+फ.

आणि जेव्हां ह्यांहून अधिक पदें घेतलीं आहेत तेव्हां ही ह्याप्रमाणेंच जाणावें.

११. जर अ : ब : : क : ड, तर मअ : मब : : $\frac{क}{न} : \frac{ड}{न}$.

आणि मअ : $\frac{ब}{न}$: : मक : $\frac{ड}{न}$.

कारण $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$, $\therefore$ (९ कल०म०) $\frac{मअ}{मब} = \frac{\frac{क}{न}}{\frac{ड}{न}}$,

$\therefore$ मअ : मब : : $\frac{क}{न} : \frac{ड}{न}$.

पुनः, $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$, $\therefore \frac{मअ}{ब} = \frac{मक}{ड}$, $\frac{मअ}{\frac{ब}{न}} = \frac{मक}{\frac{ड}{न}}$,

मअ : $\frac{ब}{न}$: : मक : $\frac{ड}{न}$.

१२. जर अ : ब : : क : ड
आणि इ : फ : : ग : ह, } तर अइ : बफ : : कग : डह.

कारण $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}, \frac{इ}{फ} = \frac{ग}{ह}$, ∴ गुणाकारानें, $\frac{अइ}{बफ}$ $= \frac{कग}{डह}$, ∴ अइ : बफ : : कग : डह.

आणखी कितीही जरी प्रमाणें असलीं तरीही ह्याप्रमाणेंच जाणावें.

१३. जर अ: ब: : क: ड, तर $अ^{न} : ब^{न} : : क^{न} : ड^{न}$,

येथें नही पूर्ण संख्या असो किंवा अपूर्ण संख्या असो. (युक्लिड, ५ वें बूक, सि० १३.)

कारण $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$, ∴ $\frac{अ^{न}}{ब^{न}} = \frac{क^{न}}{ड^{न}}$, ∴ $अ^{न} : ब^{न} : : क^{न} : ड^{न}$.

१४. जर अ: ब: : ब: क, तर अ: क: : $अ^{२} : ब^{२}$.

(युक्लिड, ५ वें बूक, सिद्धांत १५.)

कारण $\frac{अ}{ब} = \frac{ब}{क}$, ∴ $\frac{अ}{क} = \frac{अ}{ब} \times \frac{ब}{क} = \frac{अ}{ब} \times \frac{अ}{ब} = \frac{अ^{२}}{ब^{२}}$,

∴ अ : क : : $अ^{२} : ब^{२}$.

१५. जर अ : ब : : ब : क : : क : ड, तर अ : ड : : $अ^{३} : ब^{३}$. (युक्लिड, ५ वें बूक सिद्धांत १६.)

कारण $\frac{अ}{ड} = \frac{अ}{ब} \times \frac{ब}{क} \times \frac{क}{ड}$, आणि $\frac{अ}{ब} = \frac{ब}{क} = \frac{क}{ड}$,

∴ $\frac{अ}{ड} = \frac{अ}{ब} \times \frac{अ}{ब} \times \frac{अ}{ब} = \frac{अ^{३}}{ब^{३}}$, ∴ अ : ड : : $अ^{३} : ब^{३}$.

ह्या सिद्धांतांत आणि मागील सिद्धांतांत, दिलेलीं पदें अखंड प्रमाणांत आहेत.

विकार.

(२१) दोन पदांत जेव्हां परस्परें असा संबंध असतो, कीं ए-

कांत कांहीं फेरफार झाला असतां त्याचप्रमाणानें दुसऱ्यांत ही फेरफार होतो, तेव्हां तीं दोन पदें परस्पर समविकार पावतात असें ह्मणतात.

मनांत आण कीं अ आणि ब ह्यांचा परस्परें असा संबंध आहेकीं अची किंमत जर अं झाली तर बची किंमत बं ही अशी होते, कीं अ : अं : : ब : बं; तर अ, ब प्रमाणेंच समविकृत होतो, ह्मणजे अ $\propto$ ब.

ह्यास उदाहरण, एका त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ दाखवायास $\triangle$ हें चिन्ह घे, पायाची लांबी दाखवायास प घे, आणि लंबाची उंची दाखवायास ल घे; तर ल जर नियमित आहे तर $\triangle$ $\propto$ प. (युक्लिड, ६ वें बूक, सिद्धांत १.)

मनांत आण, कीं अ आणि ब ह्यांचा परस्परें असा संबंध आहे, कीं अची किंमत अं झाली असतां बची किंमत बं ही अशी होते कीं अ : अं : : $\frac{१}{ब}$: $\frac{१}{बं}$; तर अ, ब प्रमाणेंच व्यस्तविकृत होतो. ह्मणजे अ $\propto \frac{१}{ब}$.

वरचे प्रमाणेंच त्रिकोणाचीं तींच परिमाणें दाखवायास $\triangle$, प, आणि ल घे, तर $\triangle = \frac{१}{२}$ पल. (युक्लिड, १ लें बूक, सिद्धांत ४१.); आणि जर $\triangle$ नियमित आहे, आणि प जर वाढत आहे तर लस त्याप्रमाणानेंच कमी होत गेलें पाहिजे, म्हणजे जर पची किंमत मप झाली तर लची किंमत $\frac{ल}{म}$ होईल,

$\therefore$ ल प्रमाणेंच प व्यस्तविकृत होतो, ह्मणजे प $\propto \frac{१}{ल}$.

सिद्धांत. अ जर ब प्रमाणेंच विकृत होत आहे तर अ, त्याची किंमत नियमित आहे अशा पदानें बस गुणून जो गुणाकार त्या बरोबर आहे.

कांकीं, $\because$ अ : अं : : ब : बं, $\therefore$ अ : अं : : मब : मबं,

∴ परावर्तनानें अ : मब : : अ′ : मब′; ह्मणून म जर असा घेतला कीं अ = मब, तर सर्वदा अ′ = मब′.

ह्याची उलट, जर अ = मब, आणि मची किंमत नियमित आहे, तर अ ∝ ब.

⁂ विकाराचें समीकरण करतां येतें ह्मणून हा सिद्धांत ह्या विषयांत बहुत उपयोगी आहे.

असमपदांची, गुणोत्तराचीं, प्रमाणाचीं, आणि विकाराचीं उदाहरणें.

१. १५ : १७ आणि १७ : १९ ह्या गुणोत्तरांत कोणतें गुणोत्तर मोठें आहे ?

$$\left.\begin{array}{l} \frac{१५}{१७} = \frac{१५}{१७} \times \frac{१९}{१९} = \frac{२८५}{३२३} \\ \frac{१७}{१९} = \frac{१७}{१९} \times \frac{१७}{१७} = \frac{२८९}{३२३} \end{array}\right\} \therefore १७ \div १९ \text{ हें मोठें आहे.}$$

२. असें सिद्ध कर कीं $अ^३ + ब^३ : अ^२ + ब^२$ हें गुणोत्तर $अ^२ + ब^२ : अ + ब$ ह्या गुणोत्तरापेक्षां अधिक आहे.

$$\frac{अ^३+ब^३}{अ^२+ब^२} = \frac{अ^३+ब^३}{अ^२+ब^२} \times \frac{अ+ब}{अ+ब} = \frac{अ^४+अ^३ब+अब^३+ब^४}{(अ^२+ब^२)(अ+ब)},$$

$$\frac{अ^२+ब^२}{अ+ब} = \frac{अ^२+ब^२}{अ+ब} \times \frac{अ^२+ब^२}{अ^२+ब^२} = \frac{अ^४+२अ^२ब^२+ब^४}{(अ^२+ब^२)(अ+ब)};$$

$\therefore$ जसें $अ^३ब + अब^३ >$ किंवा $< २अ^२ब^२$,

ह्मणजे $अ^२ + ब^२ >$ किंवा $< २ अ ब$,

तसें $अ^३ + ब^३ : अ^२ + ब^२ >$ किंवा $< अ^२ + ब^२ : अ + ब$,

परंतु (कलम १८, उदा० १ म०) $अ^२ + ब^२ > २ अ ब$,

$\therefore अ^३ + ब^३ : अ^२ + ब^२ > अ^२ + ब^२ : अ+ब$.

३. जर क्ष : घ हें अ : ब ह्या गुणोत्तराचा वर्ग आहे,

आणि अ : ब हें अ + क्ष : क्ष − य ह्या गुणोत्तराचें वर्गमूळ आहे, तर २ क्ष : अ : : क्ष − य : य.

$$क्ष : य : : अ^2 : ब^2 \cdots\cdots (१) \therefore \frac{क्ष}{य} = \frac{अ^2}{ब^2},$$

$$\sqrt{अ+क्ष} : \sqrt{अ-य} : : अ:ब \cdots (२) \therefore \frac{अ+क्ष}{अ-य} = \frac{अ^2}{ब^2},$$

$$\therefore \frac{अ+क्ष}{अ-य} = \frac{क्ष}{य}, \therefore अ + क्ष : अ - य : : क्ष : य.$$

(कल० २) विभागीकरणानें, क्ष+य : अ−य : : क्ष−य : य,
परावर्तनानें, क्ष+य : क्ष − य : : अ − य : य,
मिश्रीकरणानें, २ क्ष : क्ष − य : : अ : य,
∴ परावर्तनानें, २ क्ष : अ : : क्ष − य : य.

४. जर $क्ष^2 + य^2$: क्षय : : १३ : ६ आणि $क्ष^2 - य^2 = २०$ } तर क्ष = ६, य = ४.

(२० कलमाप्रमाणें) $क्ष^2 + य^2 : २ क्षय : : १३ : १२,$
$क्ष^2 + २ क्षय + य^2 : क्ष^2 - २ क्षय + य^2 : : २५ : १,$
क्ष + य : क्ष − य : : ५ : १,
२ क्ष : २ य : : ६ : ४,
क्ष : य : : ३ : २,
$\therefore क्ष = \frac{३}{२} य, \therefore \frac{९}{४} य^2 - य^2 = २०, ९ य^2 - ४ य^2 = ८०,$
$५ य^2 = ८०, \therefore य^2 = १६, \therefore य = \pm ४;$
$क्ष = \frac{३}{२} य = \frac{३}{२} \times \pm ४ = \pm ६.$

५. जर य = प + क + र, ज्यांत पची किंमत नियमित आहे, आणि क ∝ क्ष, आणि $र \propto \frac{१}{क्ष}$, आणि जर क्ष = १, २, ३, य = ३. ५ $\frac{१}{३}$, ७; तर असें सिद्ध कर कीं $य = ५ + क्ष - \frac{३}{क्ष}$.

$क = अक्ष, र = \frac{ब}{क्ष}$ घे, तर $य = प + अक्ष + \frac{ब}{क्ष}$, पण

जर $क्ष = १, य = ३$, तर $३ = प + अ + ब \cdots (१)$

$\cdots क्ष = २, य = \frac{११}{२}, \frac{११}{२} = प + २अ + \frac{ब}{२} \cdots (२)$

$\cdots क्ष = ३, य = ७, ७ = प + ३अ + \frac{ब}{३} \cdots (३)$

$(२) - (१), \frac{५}{२} = अ - \frac{ब}{२},$
$(३) - (२), \frac{३}{२} = अ - \frac{ब}{६},$ } ह्यांची वजाबाकी घे.

$$१ = - \frac{ब}{३}, \therefore ब = -३,$$

$$\frac{५}{२} = अ + \frac{३}{२}, \therefore अ = १,$$

$$३ = प + १ - ३, \therefore प = ५,$$

$$\therefore य = ५ + क्ष - \frac{३}{क्ष}.$$

६. जर $क्ष^२ = अ^२ + ब^२$, आणि $य^२ = क^२ + ड^२$, तर असें सिद्ध कर कीं क्षय, अक + बड आणि अड + बक ह्या दोन पदांतून प्रत्येकाहून मोठा आहे.

$$क्ष^२ य^२ = अ^२ क^२ + ब^२ ड^२ + अ^२ ड^२ + ब^२ क^२,$$

$$= अ^२क^२ + २ अकबड + ब^२ड^२ + अ^२ड^२ - २अडबक + ब^२क^२,$$

$$= (अक + बड)^२ + (अड - बक)^२,$$

$$\therefore क्षय = \sqrt{(अक+बड)^२ + (अड - बक)^२},$$

$$\therefore क्षय > अक + बड.$$

पुनः, $क्ष^२य^२ = अ^२ड^२ + ब^२क^२ + अ^२क^२ + ब^२ड^२,$

$$= अ^२ड^२ + २अडबक + ब^२क^२ + अ^२क^२ - २अकबड + ब^२ड^२,$$

$= (अड + बक)^२ + (अक - बड)^२,$

$\therefore क्षय = \sqrt{(अड + बक)^२ + (अक - बड)^२},$

$\therefore क्षय > अड + बक.$

७. जर $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड} = \frac{इ}{फ} = इ०$, तर असें सिद्ध करा कीं,

(१) $\frac{अ}{ब} = \sqrt{\frac{अ^२+क^२+इ^२+इ०}{ब^२+ड^२+फ^२+इ०}}$, (२) $\frac{अ}{ब} = \frac{मअ+नक+पइ+इ०}{मब+नड+पफ+इ०}$.

(१) $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$, $\therefore$ अड = बक, $\therefore अ^२ड^२ = ब^२क^२$

$\frac{अ}{ब} = \frac{इ}{फ}$, $\therefore$ अफ = बइ, $\therefore अ^२फ^२ = ब^२इ^२$,

आणि $अ^२ब^२ = अ^२ब^२$;

$\therefore$ बेरजेनें, $अ^२ब^२ + अ^२ड^२ + अ^२फ^२ = अ^२ब^२ + ब^२क^२ + ब^२इ^२$,

$अ^२(ब^२ + ड^२ + फ^२) = ब^२(अ^२ + क^२ + इ^२)$,

$\therefore \frac{अ^२}{ब^२} = \frac{अ^२+क^२+इ^२}{ब^२+ड^२+फ^२}$ $\therefore \frac{अ}{ब} = \sqrt{\frac{अ^२+क^२+इ^२+इ०}{ब^२+ड^२+फ^२+इ०}}$,

(२) $\frac{अ}{ब} = \frac{मअ}{मब}$, $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$, $\frac{अ}{ब} = \frac{इ}{फ}$,

अड = बक, अफ = बइ,

अमब = बमअ, अनड = बनक, अपफ = बपइ,

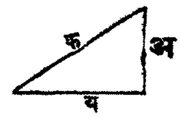
ह्मणून, अमब+अनड, + अपफ = बमअ+बनक+बपइ,

अ (मब+नड+पफ) = ब (मअ+नक+पइ),

$\therefore \frac{अ}{ब} = \frac{मअ+नक+पइ+इ०}{मब+नड+पफ+इ०}$,

८ एका काटकोन त्रिकोणांत जसें म : न तशी दोन बाजूंची

बेरीज त्याचे कर्णास आहे, तर असें सिद्ध कर कीं, मची किं-मत न $\sqrt{\text{२}}$ ह्यापेक्षां अधिक होणार नाहीं.



दोन्ही बाजू दाखवायास अ आणि ब, आणि कर्ण दाखवायास क घे, तर अ+ब : क :: म: न, (युक्लिड, १ लें बूक, सि० ४७.) $\text{अ}^{\text{२}} + \text{ब}^{\text{२}} = \text{क}^{\text{२}}$,

$$\frac{\text{अ}+\text{ब}}{\text{क}} = \frac{\text{म}}{\text{न}}, \quad \therefore \text{अ} + \text{ब} = \text{क}\,\frac{\text{म}}{\text{न}},$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{अ}^{\text{२}} + \text{२ अब} + \text{ब}^{\text{२}} = \text{क}^{\text{२}}\dfrac{\text{म}^{\text{२}}}{\text{न}^{\text{२}}} \\ \text{२ अ}^{\text{२}} \qquad + \text{२ब}^{\text{२}} = \text{२क}^{\text{२}} \end{array}\right\} \text{वजाबाकी कर.}$$

$$\text{अ}^{\text{२}} - \text{२ अब} + \text{ब}^{\text{२}} = \text{२ क}^{\text{२}} - \text{क}^{\text{२}}\frac{\text{म}^{\text{२}}}{\text{न}^{\text{२}}} = \frac{\text{क}^{\text{२}}}{\text{न}^{\text{२}}}(\text{२न}^{\text{२}} - \text{म}^{\text{२}}),$$

$$\left.\begin{array}{l} \therefore \text{अ} - \text{ब} = \pm\dfrac{\text{क}}{\text{न}}\sqrt{\text{२न}^{\text{२}} - \text{म}^{\text{२}}} \\ \text{अ} + \text{ब} = \dfrac{\text{क}}{\text{न}}\,\text{म} \end{array}\right\} \text{बेरीज आणि वजाबाकी कर.}$$

$$\therefore \text{२ अ} = \frac{\text{क}}{\text{न}}\left(\text{म} \mp \sqrt{\text{२न}^{\text{२}} - \text{म}^{\text{२}}}\right),$$

$$\text{ब} = \frac{\text{क}}{\text{न}}\left(\text{म} \mp \sqrt{\text{२न}^{\text{२}} - \text{म}^{\text{२}}}\right).$$

आतां जेव्हां $\text{म}^{\text{२}} > \text{२ न}^{\text{२}}$, ह्मणजे $\text{म} > \text{न}\sqrt{\text{२}}$ तेव्हां २ अ आणि २ ब ह्यांच्या किंमती कल्पित होतात,

∴ म हा न $\sqrt{\text{२}}$ ह्यापेक्षां अधिक होणार नाहीं.

उदाहरणें.

१. ३ : ७ आणि ४ : ९ ह्या दोन गुणोत्तरांतून कोणतें मोठें आहे? उत्तर. ४ : ९.

२. २ : ९ आणि १२ : ५ ह्या दोन गुणोत्तरांचें संयुक्त गुणोत्तर काय ? उत्तर. ८ : १५.

३. म : ६ $\text{क्ष}^२$, ३ $\text{य}^२$: न, आणि $\text{क्ष}^२$: २ $\text{य}^२$, ह्या तीन गुणोत्तरांचें संयुक्त गुणोत्तर काय ? उत्तर. म : ४ न.

४. जर क्ष > य, तर (क्ष-य) आणि $(\text{क्ष}^{\frac{१}{२}} - \text{य}^{\frac{१}{२}})^२$ ह्या दोहोंत मोठें कोणतें ? उत्तर. क्ष - य.

५. जर अ ∝ ब, आणि ब ∝ क, तर असें दाखीव कीं अ ∝ क.

६. जर अ : ब : : क : ड, तर असें सिद्ध कर कीं मअ ± नब : पअ ± कब : : मअ ± नड : पक ± कड.

७. जर क्ष=य+१२, आणि $\sqrt{\text{क्षय}}$: ४ : : $\frac{१}{२}$ (क्ष+य) : ५, } तर असें दाखीव कीं क्ष=१६, आणि य = ४.

८. जर अ > ब, तर असें दाखीव कीं

$$\sqrt{\text{अ}^२ - \text{ब}^२} + \sqrt{\text{अ}^२ - (\text{अ} - \text{ब})^२} > \text{अ}.$$

९. य ∝ क्ष, आणि जेव्हां क्ष = २, य = १०, तेव्हां असें सिद्ध कर कीं य = ५ क्ष.

१०. अशा दोन संख्या काढ कीं ज्या परस्परांस होतील जसें ३ : २, आणि ज्यांच्या बेरजेस त्यांच्या गुणाकारानें गुणून जो गुणाकार येईल तो त्यांच्या वर्गांच्या वजाबाकीच्या बारापट होईल.

उत्तर. ६ आणि ४.

११. $\text{य}^२ \propto \text{अ}^२ - \text{क्ष}^२$, असें घेऊन जेव्हां क्ष = ०

तेव्हां य = ब असें मान; तर $\text{य}^२ = \frac{\text{ब}^२}{\text{अ}^२} \left(\text{अ}^२ - \text{क्ष}^२ \right)$.

१२. जर क्ष : य : : $\text{अ}^३ : \text{ब}^३$, आणि $\sqrt[३]{\text{क} + \text{क्ष}} : \sqrt[३]{\text{ड}+\text{य}}$: : अ : ब, } तर असें सिद्ध कर कीं ड क्ष = कय.

१३. अखंड प्रमाणांत अशा तीन संख्या काढ कीं ज्यांची

बेरीज ५२ येईल, आणि त्यांच्या आद्यंत पदांची बेरीज : म-ध्यपद : : १० : ३. उत्तर. ४, १२, ३६.

प्रकरण ८.

गणितश्रेढी.

(२२). पदांचे ज्या श्रेढींतील पदें एकाच उत्तरानें वाढतात किंवा उतरतात, त्या श्रेढीस गणितश्रेढी म्हणतात. जसें १, ३, ५, ७, ९ ही गणित श्रेढी आहे. हिचें पहिलें पद १, शेवटील पद ९, उत्तर २, गच्छ ५, आणि सर्वधन २५ आहे. जर हीच श्रेढी ९, ७, ५, ३, १ अशी लिहिली, तर हिचें पहिलें पद ९, शेवटील पद १, आणि उत्तर - २, होईल.

सिद्धांत. कोणत्याही एकाद्या गणितश्रेढीचें नवें पद आणि सर्वधन काढावयाचें.

श्रेढीचें पहिलें पद दाखवायास अ, शेवटील किंवा नवें पद दाखवायास ल, उत्तर दाखवायास ड, गच्छ दाखवायास न, आणि सर्वधन दाखवायास स घे; तर ती श्रेढी अशी होईल.

अ, (अ+ड), (अ+२ड), (अ+३ड), { अ+ (न-१) ड }.

आतां ह्या श्रेढींतील कोणतेंही एकादें पद काढावयाचें आहे तर जितक्यावें पद काढावयाचें आहे त्यासंख्येंत १ वजा करून बाकीनें उत्तरास गुणावें आणि तो गुणाकार पहिल्या पदांत मिळवावा म्हणजे झालें; आणि शेवटील पद ल = अ + (न - १) ड.

हीच श्रेणी उलटी लिहिली तर ती अशी होईल.

ल, (ल-ड), (ल - २ ड), (ल - ३ ड) ··· अ.

∴ स=अ+(अ+ड)+(अ+२ड)+····+(ल-२ड)+(ल-ड)+ल,

आणि स=ल+(ल-ड)+(ल-२ड)+···+(अ+२ड)+(अ+ड)+अ,

$\therefore$ २स=(ल+अ)+(ल+अ)+···+(ल+अ)+(ल+अ)+(ल+अ),
= न वेळां (ल + अ),

$\therefore$ २ स= (ल+अ) ×न, $\therefore$ स= (ल+अ) $\frac{न}{२}$.

परंतु $\because$ ल=अ + (न−१) ड, $\therefore$ ल+अ=२अ+(न−१) ड,

$$\therefore स= \{ २ अ+ (न-१) ड \} \frac{न}{२} = नअ+ \frac{न(न-१)ड}{२}.$$

दोन संख्यांचें गणित मध्यप्रमाण = त्या दोन संख्यांच्या बेरजेचें अर्ध; म्हणजे जर म = $\frac{अ+ब}{२}$, तर म हें अ आणि ब ह्यांचें गणित मध्यप्रमाण आहे.

जेव्हां गणित श्रेणींतील गच्छ विषम आहे, तेव्हां मधलें पद = त्या पदापासून सारखे अंतरावर असणाऱ्या कोणत्याही दोन पदांच्या बेरजेचें अर्ध.

उदाहरणें.

१. २ + ५ + ८ + इत्यादि १७ पदांपर्यंत एक श्रेणी आहे, तर तिचें सर्वधन काय आहे ?

येथें अ = २, ड = ३, न = १७,

$$\therefore स = न अ + \frac{न(न-१)ड}{२} = १७ \times २ + \frac{१७ \times १६ \times ३}{२},$$

$$= ३४ + ४०८ = ४४२. \quad उत्तर.$$

२. $\frac{१}{२} + \frac{३}{८} + \frac{१}{४}$ + इ०,२०पदांपर्यंत एक श्रेणी आहे, तर तिचें सर्वधन काय आहे ?

येथें अ = $\frac{१}{२}$, ड = $-\frac{१}{८}$, न = २०,

$$\therefore स = न अ + \frac{न (न-१) ड}{२} = २० \times \frac{१}{२} + \frac{२० \times १९ \times -\frac{१}{८}}{२},$$

$$= १० - \frac{९५}{४} = \frac{४० - ९५}{४} = - \frac{५५}{४}.$$ उत्तर.

३. एका गणितश्रेढीचें सर्वधन ९५०, उत्तर ३, आणि गच्छ २५ आहे; तर तिचें शेवटील पद कांय आहे ?

येथें स = ९५०, ड = ३, न = २५,

$$स = न अ + \frac{न (न - १) ड}{२},$$

$$\therefore ९५० = २५ अ + \frac{२५ \times २४ \times ३}{२} = २५ अ + ९००,$$

$$\therefore ५० = २५ अ, \therefore अ = २, \text{ पहिलें पद.}$$

आतां $ल = अ + (न - १) ड = २ + २४ \times ३ = ७४$. उत्तर.

४. १ आणि - १ ह्यांत पांच गणितप्रमाणें घाल.

येथें अ = १, ल = - १, आणि ∵ ५ मध्यपदें आणि २ आद्यंतपदें आहेत, ∴ न = ५ + २ = ७.

$$ल = अ + (न - १) ड, \therefore ड = \frac{ल - अ}{न - १} = \frac{-१-१}{७ - १} = - \frac{२}{६} = - \frac{१}{३},$$

$$\therefore १ - \frac{१}{३} = \frac{२}{३} = \text{पहिलें मध्यप्रमाण.}$$

$\frac{२}{३} - \frac{१}{३} = \frac{१}{३}$ = दुसरें. ....
$\frac{१}{३} - \frac{१}{३} = ० =$ तिसरें. ....
$० - \frac{१}{३} = - \frac{१}{३}$ चवथें. ....
$- \frac{१}{३} - \frac{१}{३} = - \frac{२}{३}$ = पांचवें. .... } उत्तर.

५. एका पोकळ समबाजू त्रिकोणाकृतींत तीन तीन शां-

गा लावून कांहीं शिपाई उभे केले आहेत, आणि बाहेरील रांगेत न शिपाई आहेत; तर एकंदर किती शिपाई आहेत ?

प्रथमतः, तो त्रिकोण भरींव आहे असें समजून ती मनुष्य संख्या काढावयाची,

$$\text{अ} = १,\ \text{ल} = \text{न},\ \text{न} = \text{न},$$

$$\text{स} = (\text{अ} + \text{ल})\frac{\text{न}}{२} = (१ + \text{न})\frac{\text{न}}{२} = \frac{\text{न}^{२} + \text{न}}{२}.$$

पुनः, पोकळ भागांत किती मनुष्यें उभीं राहतील तें काढावयाचें,

$$\text{अ} = १,\ \text{न,} = \text{न} - ९ = \text{ल},$$

$$\text{स,} = (\text{अ} + \text{ल})\frac{\text{न}}{२} = (१+\text{न}-९)\frac{\text{न}-९}{२} = \frac{\text{न}^{२} - १७\,\text{न} + ७२}{२}.$$

आतां, पहिली मनुष्यसंख्या — दुसरी संख्या = जी संख्या काढावयाची ती;

$$\therefore \text{स} - \text{स,} = \frac{\text{न}^{२}+\text{न}}{२} - \frac{\text{न}^{२}-१७\text{न}+७२}{२} = \frac{१८\,\text{न} - ७२}{२} = ९\text{न} - ३६.$$

जर र रांगी असल्या, तर नं = न − ३ र; आणि शिपायांची संख्या $= \frac{३\,\text{र}}{२}(२\,\text{न} + १ - ३\,\text{र})$.

६. $१^{३} + २^{३} + ३^{३} \cdots + \text{न}^{३}$, ह्या श्रेढीचें सर्वधन काढ.

$$१^{३} + २^{३} + ३^{३} + ४^{३} + \cdots + \text{न}^{३} =$$

$$१+(३+५)+(७+९+११)+(१३+१५+१७+१९)+\cdots\cdots + \text{न}^{३},$$

असल्या प्रकारच्या न रकमा आहेत आणि नव्या रकमेंत न पदें आहेत.

म्हणून पदांची एकंदर संख्या काढावयाची,

$$\text{अ} = १,\ \text{ड} = १,\ \ \text{न} = \text{न},$$

$\therefore \left\{ 2 + न - 1 \right\} \frac{न}{2} = \frac{न^2+न}{2}$ = एकंदर सगळीं पदें.

आतां, सर्व श्रेढीचें सर्व धन काढावयाचें,

$अं = 1, \qquad ड = 2, \qquad न, = \frac{न^2+न}{2},$

$\therefore स = \left\{ 2 + \left(\frac{न^2+न}{2} - 1 \right) \cdot 2 \right\} \frac{न^2+न}{4} = \left(\frac{न^2+न}{2} \right)^2$

परंतु $\frac{न^2+न}{2} = 1 + 2 + 3 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + न,$

$\therefore 1^3 + 2^3 + 3^3 \cdot \cdot + न^3 = (1 + 2 + 3 \cdot \cdot + न)^2.$

७. प गणित श्रेढीचीं सर्वधनें $स_1$, $स_2$, $स_3$, इ० $स_प$ आहेत; प्रत्येक श्रेढी न पदांपर्यंत वाढविली आहे; प्रत्येक श्रेढीचीं पहिलीं पदें १, २, ३, ४, इ० आणि उत्तरें १, ३, ५, ७, इ० आहेत; तर असें सिद्ध कर कीं $स_1 + स_2 + स_3 +$ इ० $+ स_प = \frac{1}{2} \times नप\,(नप + 1)$

$$\left.\begin{array}{l} स_1 = 1, 2, 3, \\ स_2 = 2, 5, 8, \\ स_3 = 3, 8, 13, \end{array}\right\} \text{इ० नपदांपर्यंत}, \therefore \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ लें उत्तर } 1 = 2\times1-1, \\ 2 \text{ रें} \cdot\cdot\cdot\cdot 3 = 2\times2-1, \\ 3 \text{ रें} \cdot\cdot\cdot\cdot 5 = 2\times3-1, \\ \therefore \text{पवें} \cdot\cdot\cdot = 2\times प-1, \end{array}\right.$$

$\therefore स_प = प,\ 3प-1,\ 5प-2,$ इ० न पदांपर्यंत = प वी श्रेणी.

आतां, $स_1 = नअ + \frac{न\,(न-1)ड}{2} = न + \frac{न(न-1)}{2} = \frac{न^2 + न}{2},$

$$स_2 = \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot = 2न + \frac{न\,(न-1)}{2} \cdot 3 = \frac{3न^2+न}{2},$$

$$स_3 = \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot = 3न + \frac{न(न-1)}{2} \cdot 5 = \frac{5न^2+न}{2},$$

$$स_प = \cdot\cdot = पन + \frac{न(न-1)}{2} \cdot (2प-1) = \frac{(2प-1)न^2+न}{2},$$

ह्या पदांचें उत्तर न² आहे, ∴ हीं गणितप्रमाणांत आहेत; आतां ह्यांचें सर्वधन काढावयाचें,

$$अ = \frac{न^2+न}{२},\ ल = \frac{(२प-१)\, न^2+न}{२},\ न = प,$$

$$\therefore स = (अ + ल)\frac{न}{२}, = \left\{ \frac{न^2+न}{२} + \frac{(२प-१)\, न^2+न}{२} \right\} \frac{प}{२}$$

$$= \tfrac{१}{२}\, नप\, (नप + १).$$

८. पायदळाच्या एका तुकडीनें सकाळीं साहावाजतां कूच केलें, आणि ती दरतासास ३ १/२ मैल चालली; तिचे पाठीमागून तीन तासांनीं त्याच स्थलाहून घोडेस्वार पाठविले, आणि ते पहिल्या तासास ३ १/२ मैल, दुसऱ्या तासांत ४ मैल, तिसऱ्या तासांत ४१/२ मैल, ह्याप्रमाणें चालले; तर त्या स्वारांनीं किती वेळांत पायदळास गांठलें ?

पायदळास गांठवयास घोडेस्वारांस जितके तास लागले ते दाखवायास क्ष घे,

तर क्ष तासांत घोडेस्वार किती मैल चालले तें काढ,

$$अ = \tfrac{७}{२},\quad ड = \tfrac{१}{२},\quad न = क्ष,$$

$$\therefore स = \frac{न}{२}\left\{ २अ + (न-१)\, ड \right\} = \frac{क्ष}{२}\left\{ ७ + (क्ष-१)\, \frac{१}{२} \right\}$$

$$= \frac{क्ष}{२}\left(\frac{१३}{२} + \frac{क्ष}{२} \right) = \frac{१३क्ष+क्ष^2}{४} = \text{जितके}$$

मैल घोडेस्वार क्ष तासांत गेले ते.

पुनः, क्ष + ३ = पायदळ जितके तास चाललें ते,

$\therefore \tfrac{७}{२}(क्ष + ३) =$ जितके मैल तें चाललें ते,

$$\therefore \frac{७}{२}(क्ष + ३ = \frac{१३क्ष+क्ष^2}{४},\ १३क्ष+क्ष^2 = १४क्ष+४२,$$

$क्ष^2 - क्ष = ४२,\ \therefore क्ष = ७$ तास. उत्तर.

९. असें सिद्ध कर कीं एका गणित श्रेणींतील २ न पदांचें उत्तरार्ध त्याच श्रेणींतील ३ न पदांच्या सर्व धनाच्या $\frac{1}{3}$ शा बरोबर आहे.

अ, अ + ड, अ + २ ड, अ + ३ ड, अशी श्रेणी घे.

तर, २ न पदांच्या उत्तरार्धाचें सर्व धन काढावयाचें,

अ = अ, ड = ड, न = न, ∴ ल = अ + (न - १) ड = नवें अथवा पूर्वार्धाचें शेवटील पद.

∴ अ + (न - १) ड + ड, ह्मणजे अ + नड = उत्तरार्धाचें पहिलें पद, आणि

∴ $अ_1$ = अ + नड, ड = ड, न = न,

$$\therefore स = \frac{न}{२}(२अ_1 + (न-१)ड) = \frac{न}{२}\{२(अ+नड)+(न-१)ड\}$$

$$= \frac{न}{२}(२अ + २नड + नड - ड) = \frac{न}{२}(२अ + ३नड - ड)$$

= २ न पदांचे उत्तरार्धाचें सर्व धन.

आतां ३ न पदांचें सर्वधन काढावयाचें,

अ = अ, ड = ड, $न_1$ = ३ न,

$$\therefore स_1 = \frac{न_1}{२}\{२अ+(न_1-१)ड\} = \frac{३न}{२}\{२अ+(३न-१)ड\},$$

$$= \frac{३न}{२}(२अ+३नड-ड),$$

$\frac{न}{२}$ (२ अ + ३नड - ड) = ३न पदांच्या सर्व धनाचा $\frac{1}{3}$.

∴ २ न पदांचें उत्तरार्ध = ३न पदांच्या सर्वधनाचा $\frac{1}{3}$.

१०. जर, $क्ष^2 + (क्ष + १)^2 + (क्ष + २)^2 + \cdots$ ९पदांपर्यंत=५०१, तर क्षची किंमत काढ.

क्ष = ज्ञ - ४ धर, तर ती श्रेणी अशी होते

$$(ज्ञ-४)^2 + (ज्ञ-३)^2 + (ज्ञ-२)^2 + (ज्ञ-१)^2 + ज्ञ^2$$

$$+(\text{ज्ञ}+१)^२+(\text{ज्ञ}+२)^२+(\text{ज्ञ}+३)^२+(\text{ज्ञ}+४)^२=५०१,$$

$$२\text{ज्ञ}^२+३२+२\text{ज्ञ}^२+१८+२\text{ज्ञ}^२+८+२\text{ज्ञ}^२+२+\text{ज्ञ}^२=५०१,$$

$$९\text{ज्ञ}^२+६०=५०१,\quad ९\text{ज्ञ}^२=४४१,\quad ३\text{ज्ञ}=२१,$$

$$\therefore \text{ज्ञ}=७,\quad \therefore \text{क्ष}=\text{ज्ञ}-४=३.$$

११. गणित प्रमाणांत अशा तीन संख्या काढ, कीं ज्यांची बेरीज ३० येईल, आणि ज्यांच्या वर्गांची बेरीज ३०८ येईल.

क्ष−य, क्ष, क्ष+य, हीं पदें त्या तीन संख्या दाखविण्यास घे, तर $\text{क्ष}-\text{य}+\text{क्ष}+\text{क्ष}+\text{य}=३०$, म्हणजे $३\,\text{क्ष}=३०$, $\therefore \text{क्ष}=१०$,

$$\text{क्ष}^२-२\,\text{क्षय}+\text{य}^२+\text{क्ष}^२+\text{क्ष}^२+२\,\text{क्षय}+\text{य}^२=३०८,$$

$$३\,\text{क्ष}^२+२\,\text{य}^२=३०८,\quad २\text{य}^२=३०८-३\,\text{क्ष}^२=३०८-३००=८,$$

$$\therefore \text{य}^२=४,\ \text{य}=२=\text{उत्तर},$$

$$\left.\begin{aligned}\text{म्हणून } \text{क्ष}-\text{य}&=१०-२=८.\\ \text{क्ष}&=१०\quad =१०.\\ \text{क्ष}+\text{य}&=१०+२=१२.\end{aligned}\right\}\ \text{उत्तर.}$$

१२. गणितप्रमाणांत अशा चार संख्या काढ कीं ज्यांची बेरीज २४, आणि गुणाकार ९४५ होईल.

क्ष − ३ य, क्ष − य, क्ष + य, क्ष + ३ य, ह्या त्या चार संख्या घे,

तर त्यांची बेरीज $४\,\text{क्ष}=२४$, $\therefore \text{क्ष}=६$,

त्यांचा गुणाकार $(\text{क्ष}-३\text{य})(\text{क्ष}+३\text{य})(\text{क्ष}-\text{य})(\text{क्ष}+\text{य})=९४५.$

$$\therefore (\text{क्ष}^२-९\text{य}^२)(\text{क्ष}^२-\text{य}^२)=९४५,$$

$\therefore \text{क्ष}^४-१०\,\text{क्ष}^२\text{य}^२+९\text{य}^४=९४५$; ह्यांत क्षची किंमत मांडल्यानें,

$$१२९६-३६०\,\text{य}^२+९\,\text{य}^४=९४५,$$

$$९\,\text{य}^४-३६०\,\text{य}^२=-२५१,\quad \therefore \text{य}=१.$$

म्हणून क्ष − ३ य = ६ − ३ = ३.
क्ष − य = ६ − १ = ५.
क्ष + य = ६ + १ = ७.
क्ष + ३ य = ६ + ३ = ९. } उत्तर.

उदाहरणें.

१. १ + २ + ३ + ४ + इ० नपर्यंत पदांचें श्रेढीचें सर्वधन काढ. उत्तर. $\frac{१}{२}$ न (न + १).

२. ९ + १५ + २१ + इ०, १० पदांपर्यंत पदांची बेरीज काढ. उत्तर. ३६०.

३. $\frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \frac{१}{६}$ + इ०, २० पदांच्या श्रेढीचें सर्वधन, आणि २० वें पद काढ.

उत्तर. − २१ $\frac{२}{३}$ आणि − २ $\frac{२}{३}$.

४. १ + ८ + १५ + इ०, १०० पदांची बेरीज = ३४७५०.

५. $\frac{१}{३} + \frac{१}{४} + \frac{१}{६}$ + इ०, १२ पदांची बेरीज = −१ $\frac{१}{२}$.

६. ७, ५ $\frac{१}{२}$, ४, इ० पदांचे श्रेढीचें ९ वें पद = −५.

७. $\frac{७}{१२} + \frac{२}{३} + \frac{३}{४}$ + इ०, २४ पदांच्या श्रेढीचें सर्वधन, आणि २४ वें पद काढ.

उत्तर. ३७, आणि २ $\frac{१}{२}$.

८. जींत अ = ३, ल = १७, न = २९, ती श्रेढी काढ.

उत्तर. ३, ३ $\frac{१}{२}$, ४, ४ $\frac{१}{२}$, इ०.

९. १, ९, १७, २५, इ०, पदांचे श्रेढीचें १०० वें पद = ७९३.

१०. $\frac{१}{२} + \frac{३}{४}$ + १ + इ०, १० पदांची बेरीज = १६ $\frac{१}{४}$.

११. १९८, १९३, १८८, इ०, ४० पदांच्या श्रेढीचें सर्वधन काढ. उत्तर. ४०२०.

१२. $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{६}$, $-\frac{१}{६}$. इ० पदांचे श्रेढीचें २० वें पद = $-५\frac{५}{६}$.

१३. $\frac{१}{२} - \frac{२}{३} - \frac{११}{६}$ इ०, १३ पदांच्या श्रेढीचें सर्वधन काढ.

उत्तर. $-८४\frac{१}{२}$.

१४. $\frac{५}{७} + १\frac{२}{७} +$ इ०, न पदांच्या श्रेढीचें सर्वधन काढ.

उत्तर. $\frac{न}{७}$ (२ न + ३).

१५. १९ आणि ३५ ह्यांच्या मध्यें तीन गणित ममाणें, आणि २$\frac{२}{३}$ आणि $\frac{२}{३}$ ह्यांच्या मध्यें पांच गणित ममाणें काढ.

उत्तर. २३, २७, ३१; आणि २$\frac{१}{३}$, २, १$\frac{२}{३}$, १$\frac{१}{३}$, १.

१६. जर स = ४०, अ = ७, ड = २; तर न काय ?

उत्तर. न = ४, किंवा − १०.

१७. एका गणितश्रेढींतील पहिल्या पदापासून पंधरा पदांची बेरीज ६००, आणि उत्तर ५ आहे; तर तींतील पहिलें पद काढ. उत्तर. ५.

१८. एका गणितश्रेढींतील पहिलें पद ३ आहे, आणि पहिल्यापासून दाहा पदांची बेरीज १६५ आहे; तर ती श्रेढी कोणती आहे ? उत्तर. ३, ६, ९, इ०

१९. २$\frac{१}{२}$ आणि ६$\frac{१}{४}$ ह्यांच्या मध्यें चार गणित ममाणें घाल.

उत्तर. ३$\frac{१}{४}$, ४, ४$\frac{३}{४}$, ५$\frac{१}{२}$.

२०. एका श्रेढींतील पहिल्यापासून ९ पदांची बेरीज ० आहे, आणि शेवटील पद $-\frac{१}{३}$ आहे; तर ती श्रेढी कोणती आहे ?

उत्तर. $\frac{१}{३} + \frac{१}{४} + \frac{१}{६} +$ इत्यादि.

२१. −१ आणि १५ ह्यांच्यामध्यें तीन गणित ममाणें घाल.

उत्तर. ३, ७, आणि ११.

२२. एका गणितश्रेढीचें सर्व धन ६$\frac{७}{८}$, पहिलें पद १$\frac{१}{४}$. आणि उत्तर $-\frac{१}{८}$ आहे; तर त्या श्रेढीचा गच्छ काय आहे ?

उत्तर. १०.

२३. एका गणितश्रेढींतील तिसरें पद ७ आहे, आणि साहावें पद १६ आहे तर ती श्रेढी कोणती आहे ?

उत्तर. १, ४, ७, १०, इ०.

२४. १ आणि ३१ ह्यांच्यामध्यें क्ष गणित प्रमाणें आहेत, आणि (क्ष-१) ह्या मध्य प्रमाणाच्या $\frac{५}{९}$ बराबर ७ वें पद आहे; तर तीं मध्यप्रमाणें किती आहेत ?

उत्तर. १४.

२५. गणित प्रमाणांत अशा तीन संख्या काढ, कीं ज्यांची बेरीज १० आहे, आणि दुसऱ्या संख्येचा आणि तिसऱ्या संख्येचा गुणाकार ३३$\frac{१}{३}$ आहे.

उत्तर. - ३ $\frac{१}{३}$, ३ $\frac{१}{३}$, १०.

२६. गणित प्रमाणांत अशा तीन संख्या काढ, कीं ज्यांची बेरीज १५ आहे, आणि ज्यांच्या वर्गांची बेरीज ९३ आहे.

उत्तर. २, ५, ८.

२७. $\frac{\text{क्ष}^{२}-१}{\text{क्ष}} + \text{क्ष} + \frac{\text{क्ष}^{२}+१}{\text{क्ष}} + \text{इ०}$ न पदांच्या श्रेढीचें सर्वधन आणि नवें पद काढ.

उत्तर. $\text{नक्ष} + \frac{१}{२}\,\text{न}\,(\text{न}-३)\,\frac{१}{\text{क्ष}}$, आणि $\text{क्ष} + (\text{न}-२)\cdot\frac{१}{\text{क्ष}}$.

२८. गणितप्रमाणांत अशा तीन संख्या काढ कीं ज्यांची बेरीज २४ आहे, आणि गुणाकार ४८० आहे.

उत्तर. ६, ८, १०.

२९. ज्या श्रेढीचें पहिलें पद $\text{न}^{२} - \text{न} + १$ आहे, आणि उत्तर २ आहे, त्या श्रेढीच्या न पदांची बेरीज काढ.

उत्तर. $\text{न}^{३}$.

३०. गणितप्रमाणांत अशा चार संख्या काढ, कीं ज्यांतील आद्यंतपदांचा गुणाकार २७ होईल, आणि मध्यपदांचा गुणाकार ३५ होईल.

उत्तर. ३, ५, ७, ९.

३१. ज्या गणितश्रेढीचें नवें पद आणि मवें पद अनुक्रमें म

आणि न आहेत, तर तिच्या त्या पदांची बेरीज $\frac{१}{२}$ (न + न). (म + न - १) आहे, त्या पदांची संख्या आणि तिचें शेवटील पद काढ.

उत्तर. म + न, किंवा म + न - १; आणि ०, किंवा १.

३२. कोणी एका गृहस्थाच्या दृष्टीस असें पडलें, कीं एक आगबोट पहिल्या सेकंदांत ४ फूट जाते आणि ६० व्या सेकंदांत ८८ फूट जाते; तर दरएक सेकंदांत तिची गति एकसारखीच वाढत आहे असें मानल्यास ती पहिल्या मिनिटांत किती फूट लांब जाईल ?

उत्तर. २७६० फूट.

३३. पाठीमागलेंच उदाहरण घेऊन, त्या आगबोटीची गति कोणत्या संख्येनें एकसारखी वाढत होती ती, आणि तिला पहिला मैल जावयास किती वेळ लागला तो काढ.

उत्तर. १$\frac{२५}{५९}$ फूट; आणि सुमारें, ८३$\frac{२१}{२५}$ सेकंद.

३४. एका गणित श्रेढीचा गच्छ उत्तराच्या अर्धाबरोबर आहे, शेवटचें पद पहिल्या पदाच्या चौपट आहे, आणि सर्वधन पहिल्या पदाच्या वर्गाच्या $\frac{३}{४}$ शांबरोबर आहे; तर ती श्रेढी काढ.

उत्तर. २०, ३२, ४४, ५६, ६८, ८०.

३५. कोणी एका गांवाहून अ दुसरे गांवीं जावयास निघाला, आणि तो पहिल्या दिवशीं क्ष मैल, दुसरे दिवशीं २ क्ष मैल, तिसरे दिवशीं ३ क्ष मैल, ह्याप्रमाणें चालत गेला; ४ दिवसांनीं त्याच गांवाहून त्यास गांठावयास ब निघाला, तो दररोज ९ क्ष मैल चालला; तर त्यास अ ला गांठावयास किती दिवस लागले ?

उत्तर. ४ दिवस.

३६. कांहीं मनुष्यांनीं मिळून ३४५ पौंडांस एक शेत खरेदी केलें, त्यांत जो मनुष्य वयानें लहान होता त्यानें जितका पैसा दिला त्याहून ५ पौंड अधिक इतका त्यापेक्षां जो वडील होता त्यानें दिला, आणि ह्याचप्रमाणें बाकीचे मनुष्य गणित

प्रमाणानें पैसा देत गेले. नंतर कनिष्ठ मंडळीनें (म्हणजे सर्वांहून जो वयानें लहान त्यापासून सर्व मनुष्य संख्येचें अर्ध इतक्या मनुष्यांनीं) आपल्या पैक्याचे किमतीचें शेत तोडून घेतलें, आणि आपआपली वर्गणीसारखी करून आपापणांत तें शेत सारखें वांटून घ्यावें असा त्यांनीं ठराव केला, तेव्हां एकेकावर २२ पौंड वर्गणी आली; तर शेत खरेदी केलें तेव्हां एकंदर मनुष्यें किती होती ?

उत्तर. १० मनुष्यें.

३७. एका गणित श्रेढींतील न + १ पदांची बेरीज (१+न). $(१\frac{१}{३}+ न)$ आहे, तर तींतील नवें पद काढ.

उत्तर. $२(म - \frac{१}{३})$.

३८. एका गणित श्रेढींतील न पदांची बेरीज $पन + कन^{२}$ आहे, तर तींतील नवें पद काढ.

उत्तर. प + (२म−१) क.

३९. एका गणित श्रेढींतील न पदांची बेरीज $\frac{न}{७}(न + ४)$ आहे, तर ती श्रेढी काढ.

उत्तर. $\frac{५}{७}$, १, $१\frac{२}{७}$, $१\frac{४}{७}$, इ०.

४०. एका गणित श्रेढींतील प वें पद अ, क वें पद ब, आणि र वें पद क आहे; तर अ, ब, आणि क ह्यांचे मध्यें परस्पर काय संबंध आहे ?

उत्तर. (क−र) अ + (र−प) ब + (प−क) क=०.

भूमितिश्रेढी.

(२३). ज्या श्रेढींतील पदें एकाच गुणोत्तरानें चढतात किंवा उतरतात, त्या श्रेणीस भूमितिश्रेढी म्हणतात. जसें १, ३, ९, २७, ८१, ही भूमितिश्रेढी आहे, हींतील गुणोत्तर ३ आहे; आणि $\frac{१}{३}$, $\frac{१}{६}$, $\frac{१}{१२}$, $\frac{१}{२४}$, $\frac{१}{४८}$, ही ही भूमितिश्रेढी आहे, हींतील

गुणोत्तर $\frac{१}{२}$ आहे. श्रेढींतील कोणत्या एका पदास त्याच्याच मागल्या पदानें भागिलें असतां गुणोत्तर निघतें.

सिद्धांत. भूमितिश्रेढीचें नवें पद आणि सर्वधन काढावयाचें.

पहिलें पद दाखवायास अ, नवें पद दाखवायास ल, गुणोत्तर दाखवायास र. आणि सर्वधन दाखवायास स घे, तर ती भूमितिश्रेढी अशी होईल.

$अ, अर, अर^२, अर^३ \cdots अर^{न-२} अर^{न-१}$ आणि ह्या वरून हें उघड आहे कीं नवें पद $ल = अर^{न-१}$,

आतां, $स = अ + अर + अर^२ \cdot\cdot अर^{न-२} + अर^{न-१}$,

$\therefore सर = अर + अर^२ + अर^{न-२} + अर^{न-१} + अर^न$,

$\therefore$ वजाबाकी केल्यानें, $सर - स = अर^न - अ$,

ह्मणजे, $स (र-१) = अ (र^न-१)$,

$$\therefore स = अ \frac{(र^न-१)}{र-१}.$$

कुर० १. $\because स = \frac{अर^न-अ}{र-१}$ आणि $रल=अर^न$, $\therefore स = \frac{रल-अ}{र-१}$

कुर० २. $\because स = \frac{अर^न}{र-१} - \frac{अ}{र-१}$, आणि जर र समअपूर्णांक आहे, तर जसजसा न वाढत जाईल, तसतशी $र^न$ची किंमत कमी होत जाईल, आणि जेव्हां न अतिशयितच वाढेल, तेव्हां $र^न$ कोणत्याही कमी किंमतीचे पदाहून कमी होईल. $\therefore \frac{अर^न}{र-१}$ हें पद न घेतलें तरी चालेल. आणि मग $-\frac{अ}{र-१}$ किंवा $\frac{अ}{१-र}$ हें पद श्रेढीची मर्यादा दाखवील.

म्हणून, जेव्हां र समअपूर्णांक आहे आणि श्रेढी अतिशयच वाढविली आहे, तेव्हां $स = \frac{अ}{१-र}$.

दोन पदांचे भूमितिमध्यप्रमाण = त्यांच्या गुणाकाराचें वर्गमूळ म्हणजे, जर अ, म, ब, हीं पदें भूमितिप्रमाणांत आहेत, तर $\frac{म}{अ} = \frac{ब}{म}$, $\therefore म^२ = अब$, $\therefore म = \sqrt{अब}$.

उदाहरणें.

१. १, २, ४, ८ इ०, १२ पदांच्या श्रेढीचें सर्वधन काढ.

येथें अ = १, र = २, न = १२,

$$\therefore स = अ \frac{र^न - १}{र-१} = १ \cdot \frac{२^{१२} - १}{२-१} = ४०९६ - १ = ४०९५.$$

२. ६५६१, २१८७, ७२९, इ०, ६ पदांच्या श्रेढीचें सर्वधन काढ.

येथें अ ६५६१, $र = \frac{१}{३}$, न = ६,

$$\therefore स = अ \cdot \frac{र^न - १}{र-१} = अ \frac{(\frac{१}{३})^६ - १}{\frac{१}{३} - १} = अ \frac{\frac{१}{७२९} - १}{\frac{१}{३} - १};$$

$$= अ \cdot \frac{१-७२९}{२४३-७२९} = अ \frac{-७२८}{-४८६} = ६५६१ \times \frac{३६४}{२४३},$$

$$= २७ + ३६४ = ९८२८.$$

३. $\frac{२}{३} - \frac{१}{३} + \frac{१}{६} -$ इ०, अनंत पदांच्या श्रेढीचें सर्व धन काढ.

येथें $अ = \frac{२}{३}$, $र = -\frac{१}{२}$,

$$\therefore स = \frac{अ}{१-र} = \frac{\frac{२}{३}}{१+\frac{१}{२}} = \frac{४}{६+३} = \frac{४}{९}.$$

४. $\frac{१}{३}$ आणि ८१ ह्यांच्यामध्यें चार भूमितिमध्यमाणें घाल.

येथें २ आद्यंत पदें आणि ४ मध्यपदें मिळून एकंदर ६ पदें आहेत;

$$अ = \frac{१}{३},\ ल = ८१,\ न = ६,$$

आतां $ल = अ र^{न-१}$, $\therefore ८१ = \frac{१}{३} र^{५}$, $र^{५} = २४३ = ३^{५}$, $\therefore र = ३$;

$\therefore \frac{१}{३} \times ३ = १,\ १ \times ३ = ३,\ ३ \times ३ = ९,\ ९ \times ३ = २७,$

आणि $\therefore$ १, ३, ९, २७ हीं मध्यमाणें आहेत.

५. अ आणि ब ह्या दोन पदांचें गणितमध्यमाण जर त्यांचे भूमितिमध्यमाणाचे दुप्पट आहे, तर असें सिद्ध कर कीं

$$\frac{अ}{ब} = \frac{२ + \sqrt{३}}{२ - \sqrt{३}}.$$

$\frac{अ + ब}{२}$ = गणित मध्यमाण, $\sqrt{अब}$ = भूमिति मध्यमाण;

आतां $\frac{अ + ब}{२} = २\sqrt{अब}$, $\therefore अ + ब = ४\sqrt{अ}\sqrt{ब}$,

$$\frac{\sqrt{अ}}{\sqrt{ब}} + \frac{\sqrt{ब}}{\sqrt{अ}} = ४,\ \therefore \frac{अ}{ब} + २ + \frac{ब}{अ} = १६,\ \frac{अ}{ब} - २ + \frac{ब}{अ} = १२,$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sqrt{अ}}{\sqrt{ब}} - \frac{\sqrt{ब}}{\sqrt{अ}} &= २\sqrt{३},\\ \frac{\sqrt{अ}}{\sqrt{ब}} + \frac{\sqrt{ब}}{\sqrt{अ}} &= ४\end{aligned}\right\} \therefore \begin{aligned}२\frac{\sqrt{अ}}{\sqrt{ब}} &= ४ + २\sqrt{३},\\ २\frac{\sqrt{ब}}{\sqrt{अ}} &= ४ - २\sqrt{३},\end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{अ}}{\sqrt{ब}} = २ + \sqrt{३},\ \frac{\sqrt{ब}}{\sqrt{अ}} = २ - \sqrt{३},$$

$$\therefore \frac{\sqrt{अ}}{\sqrt{ब}} \div \frac{\sqrt{ब}}{\sqrt{अ}} = \frac{अ}{ब} = \frac{२+\sqrt{३}}{२-\sqrt{३}}.$$

६. एका अनंत पदांचे श्रेढीचें सर्वधन २ आहे, आणि त्याच श्रेढीच्या पदांच्या वर्गांची बेरीज $\frac{४}{३}$ आहे; तर अ आणि र काढ.

$$अ+अर+अर^{२}+अर^{३}+ इ० = \frac{अ}{१-र} = २ \cdot \cdots\cdots (१)$$

$$अ^{२}+अ^{२}र^{२}+अ^{२}र^{४}+अ^{२}र^{६}+ इ० = \frac{अ^{२}}{१-र^{२}} = \frac{४}{३} \cdot \cdots\cdots (२)$$

(२) ह्यास (१) ह्यानें भागल्यानें, $\frac{अ}{१+र} = \frac{२}{३}, \therefore अ = \frac{२}{३}(१+र)$;

(१) $अ = २(१-र)$; आणि ह्या अच्या किंमतींचें समीकरण केल्यानें,

$$\tfrac{२}{३}(१+र) = २(१-र),\ १+र = ३-३र,$$

$$४र = २,\ \therefore र = \tfrac{१}{२},\ \text{आणि } अ = २-२र = २-१=१.$$

७. जर $१+र+र^{२}+र^{३}+$ इ० अनंत $= स,$ आणि $१+न+न^{२}+न^{३}+$ इ० $\cdots\cdots = स_{१},$ तर असें सिद्ध कर कीं,

$$१+रन+र^{२}न^{२}+र^{३}न^{३}+ इ० \cdots = \frac{सस_{१}}{स+स_{१}-१}.$$

आतां, $१+रन+र^{२}न^{२}+$ इ० $= \frac{१}{१-रन},$

$स=\frac{१}{१-र}$, आणि $स_{१} = \frac{१}{१-न}, \therefore स-सर=१, स_{१}-स_{१}न=१,$

$$सर = स-१,\ स_{१}न = स_{१}-१,\ \therefore र = १-\frac{१}{स},\ न=१-\frac{१}{स_{१}},$$

$$\therefore रन = १-\frac{१}{स}-\frac{१}{स_{१}}+\frac{१}{सस_{१}},\ \therefore १-रन = \frac{१}{स}+\frac{१}{स_{१}}-\frac{१}{सस_{१}},$$

म्हणून $१+रन+र^{२}न^{२}+$ इ० $= \dfrac{१}{\frac{१}{स}+\frac{१}{स_{१}}-\frac{१}{सस_{१}}} = \dfrac{सस_{१}}{स_{१}+स-१}.$

८. असें सिद्ध कर कीं ४·५२१२१२१ इ० = ४ $\frac{८६}{१६५}$.

आतां, ४·५२१२१२१ इ० $= ४ + \frac{५}{१०} + \frac{२१}{१०००} + \frac{२१}{१०००००} +$ इ०,

परंतु $\frac{२१}{१०००} + \frac{२१}{१०००००} + \frac{२१}{१००००००००} +$ इत्यादि $= \frac{\frac{२१}{१०००}}{१ - \frac{१}{१००}}$,

$$= \frac{२१}{१०००-१०} = \frac{२१}{९९०} = \frac{७}{३३०},$$

$\therefore$ ४·५२१२१२१ इ० $= \frac{४५}{१०} + \frac{७}{३३०} = \frac{१४९२}{३३०} = ४\ \frac{८६}{१६५}$.

९. अ − (अ+ड) क्ष + (अ+२ड) क्ष^{२} − (अ+३ड) क्ष^{३} + इत्या०, अनंत पदांचें श्रेढीचें सर्वधन काढ.

स = अ − अक्ष − डक्ष + अक्ष^{२} + २डक्ष^{२} − अक्ष^{३} − ३डक्ष^{३} + इ०,

सक्ष = अक्ष − अक्ष^{२} − डक्ष^{२} + अक्ष^{३} + २डक्ष^{३} − अक्ष^{४} − ३डक्ष^{४} + इ०,

$\therefore$ स + सक्ष = अ − डक्ष + डक्ष^{२} − डक्ष^{३} + डक्ष^{४} − डक्ष^{५} + इत्या०,

ह्मणजे, (१+क्ष) स = अ − ड (क्ष − क्ष^{२} + क्ष^{३} − इ०) = अ − ड $\times \frac{क्ष}{१+क्ष}$,

$$\therefore स = \frac{अ}{१+क्ष} - \frac{डक्ष}{(१+क्ष)^{२}} = \frac{अ + (अ - ड) क्ष}{(१+क्ष)^{२}}.$$

१०. जर एका भूमितिश्रेढींत न पदांचा गुणाकार प, बेरीज स, आणि व्युत्क्रमांची बेरीज $स_{१}$ आहे; तर असें सिद्ध कर कीं

$$प^{२} = \left(\frac{स}{स_{१}}\right)^{न}.$$

१ ली श्रेढी,

$$स = अ + अर + अर^{२} + अर^{३} + \cdots अर^{न-१} = अ \cdot \frac{र^{न} - १}{र - १},$$

२ री श्रेढी.

$$\text{स}_{१} = \frac{१}{\text{अ}} + \frac{१}{\text{अर}} + \frac{१}{\text{अर}^{२}} + \frac{१}{\text{अर}^{३}} + \cdots \frac{१}{\text{अर}^{\text{न}-१}} = \frac{१}{\text{अ}} \cdot \frac{\left(\frac{१}{\text{र}}\right)^{\text{न}} - १}{\frac{१}{\text{र}} - १}$$

$$= \frac{१}{\text{अ}} \cdot \frac{१-\text{र}^{\text{न}}}{\text{र}^{\text{न}-१} - \text{र}^{\text{न}}} = \frac{१}{\text{अर}^{\text{न}-१}} \cdot \frac{१-\text{र}^{\text{न}}}{१-\text{र}} = \frac{१}{\text{अर}^{\text{न}-१}} \cdot \frac{\text{र}^{\text{न}}-१}{\text{र}-१},$$

$$\therefore \frac{\text{स}}{\text{स}_{१}} = \text{अ}^{२}\text{र}^{\text{न}-१}, \left(\frac{\text{स}}{\text{स}_{१}}\right)^{\text{न}} = \text{अ}^{२\text{न}}\,\text{र}^{\text{न}(\text{न}-१)};$$

आतां $\text{प} = \text{अ} \cdot \text{अर} \cdot \text{अर}^{२} \cdots\cdots \text{अर}^{\text{न}-१} = \text{अ}^{\text{न}} \cdot \text{र}^{१+२+३+\cdots\cdots(\text{न}-१)},$

$१+२+३+\cdots\cdots(\text{न}-१)$ ह्या गणितश्रेढीचें सर्वधन काढ.

$$\text{स}' = \frac{\text{न}'}{२}\left\{२\text{अ}+(\text{न}'-१)\text{ड}\right\} = \frac{\text{न}-१}{२}\left\{२+(\text{न}-२)\right\} = \frac{\text{न}(\text{न}-१)}{२},$$

$$\therefore \text{प} = \text{अ}^{\text{न}}\,\text{र}^{\text{न}\frac{(\text{न}-१)}{२}} \quad \text{प}^{२} = \text{अ}^{२\text{न}}\,\text{र}^{\text{न}(\text{न}-१)}$$

$$\therefore \text{प}^{२} = \left(\frac{\text{स}}{\text{स}_{१}}\right)^{\text{न}}$$

११: अशा दोन संख्या काढ, कीं ज्यांची वजाबाकी १२ होईल, आणि ज्यांचें गणित मध्यप्रमाणः भूमितिमध्य प्रमाणास : : ५ : ४.

मोठी संख्या = क्ष, धाकटी संख्या = य घे, तर क्ष−य=१२,

$\frac{\text{क्ष} + \text{य}}{२}$ = गणित मध्यप्रमाण, $\sqrt{\text{क्षय}}$=भूमितिमध्यप्रमाण,

$\frac{\text{क्ष} + \text{य}}{२} : \sqrt{\text{क्षय}} :: ५ : ४$, $\text{क्ष}+\text{य} : २\sqrt{\text{क्षय}} :: ५ : ४$,

(कल॰२०म॰) $\text{क्ष}+२\sqrt{\text{क्षय}}+\text{य} : \text{क्ष}-२\sqrt{\text{क्षय}}+\text{य} :: ९ : १$,

$$\sqrt{\text{क्ष}} + \sqrt{\text{य}} : \sqrt{\text{क्ष}} - \sqrt{\text{य}} :: ३ : १,$$

$$२\sqrt{क्ष} : २\sqrt{य} :: ४ : २,$$

$$\sqrt{क्ष} : \sqrt{य} :: २ : १, \quad क्ष : य :: ४ : १,$$

$$\therefore क्ष = ४ य, \quad ४ य - य = १२, \quad ३ य = १२,$$

$$\therefore य = ४, \quad क्ष = १६.$$

१२. जर $स = १ + \frac{३}{२} + \frac{५}{४} + \frac{७}{८} + इ०$, अनंतपदांपर्यंत,

आणि $स_१ = १ - \frac{३}{२} + \frac{५}{४} + \frac{७}{८} + इ०, \quad \cdots\cdots;$

तर असें सिद्ध कर कीं $स : स_१ :: २७ : १$.

$$\left.\begin{array}{l} स = १ + \frac{३}{२} + \frac{५}{४} + \frac{७}{८} + \frac{९}{१६} + इ० \\ \frac{स}{२} = \quad \frac{१}{२} + \frac{३}{४} + \frac{५}{८} + \frac{७}{१६} + इ० \end{array}\right\} \text{वजाबाकी घे.}$$

$$\frac{स}{२} = १ + १ + \frac{१}{२} + \frac{१}{४} + \frac{१}{८} + इ० = २ + \frac{\frac{१}{२}}{१ - \frac{१}{२}} = २ + १ = ३,$$

$$\therefore स = ६;$$

$$\left.\begin{array}{l} स_१ = १ - \frac{३}{२} + \frac{५}{४} - \frac{७}{८} + \frac{९}{१६} - इ० \\ \frac{स_१}{२} = \quad \frac{१}{२} - \frac{३}{४} + \frac{५}{८} - \frac{७}{१६} + इ० \end{array}\right\} \text{बेरीज घे.}$$

$$\therefore \frac{३स_१}{२} = १ - १ + \frac{१}{२} - \frac{१}{४} + \frac{१}{८} - \frac{१}{१६} + इ० = \frac{\frac{१}{२}}{१-(-\frac{१}{२})} = \frac{\frac{१}{२}}{\frac{३}{२}} = \frac{१}{३},$$

$$\therefore स_१ = \frac{२}{९};$$

$$\therefore स : स_१ :: ६ : \frac{२}{९}, :: ३ : \frac{१}{९}, :: २७ : १.$$

१३. एका भांड्यांत १० शेर दूध होतें, त्यांतून एक शेर दूध काढून त्यांत एक शेर पाणी ओतलें; पुनः त्या मिश्रणांतून

एक शेर दूध काढून एक शेर पाणी ओतलें; आतां ह्याप्रमाणें दाहा वेळां केलें; तर प्रत्येक वेळीं दूध आणि पाणी ह्यांचें चांगलें मिश्रण होतें असें मानून, शेवटीं त्यांत वास्तविक दूध किती शेर राहिलें?

प्रथमः १० शेर दूध होतें,

$\frac{१}{१०}$ शेर दूध काढलें;

मग ९ शेर दूध बाकी राहिलें,

आणि १ शेर पाणी त्यांत ओतलें;

$\frac{९}{१०}$ शेर दूध काढलें,

$९ - \frac{९}{१०} = \frac{८१}{१०}$ शेर दूध त्या भांड्यांत शिलक राहिलें,

आणि $\frac{१९}{१०}$ शेर पाणी त्यांत उरलें;

$\frac{८१}{१००}$ शेर दूध काढलें.

$\therefore १ + \frac{९}{१०} + \frac{८१}{१००} +$ इ० दहापदें = जितके शेर दूध काढलें ते,

येथें $\text{अ}=१$, $\text{र}= \frac{९}{१०}$, $\text{न}=१०$,

$$\therefore \text{स}=\text{अ}\,\frac{\text{र}^{\text{न}}-१}{\text{र}-१} = \frac{\left(\frac{९}{१०}\right)^{१०}-१}{\frac{९}{१०}-१} = \frac{\cdot९^{१०}-१}{\cdot९-१} = \frac{१-\cdot३४८६७८४४०१}{१-\cdot९},$$

$$= \frac{\cdot६५१३२१५५९९}{\cdot१} = ६\cdot५१३२१५५९९ = \text{काढलेलें दूध.}$$

$$\therefore १०-६\cdot५१३२१५५९९=३.४८६७८४४०१,$$

= शिल्लक राहिलेलें दूध.

१४. भूमिति प्रमाणांत अशा तीन संख्या काढ, कीं त्यांची बेरीज ७ आहे, आणि त्यांच्या व्युत्क्रमांची बेरीज $\frac{७}{४}$ आहे.

पहिलीसंख्या $= \frac{\text{क्ष}}{\text{य}}$, आणि गुणोत्तर = य घे,

$$\text{तर } \frac{\text{क्ष}}{\text{य}} + \text{क्ष} + \text{क्षय} = ७, \text{ आणि } \frac{\text{य}}{\text{क्ष}} + \frac{१}{\text{क्ष}} + \frac{१}{\text{क्षय}} = \frac{७}{४},$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{१}{\text{य}} + १ + \text{य} = \frac{७}{\text{क्ष}} \\ \text{य} + १ + \frac{१}{\text{य}} = \frac{७}{४}\text{क्ष} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \therefore \frac{७}{४}\text{क्ष} = \frac{७}{\text{क्ष}}, \\ \text{क्ष}^{२} = ४, \therefore \text{क्ष} = २. \end{array}$$

$$\therefore \text{य} + १ + \frac{१}{\text{य}} = \frac{७}{२}, \text{य} - \frac{५}{२} = - \frac{१}{\text{य}},$$

$$\text{य}^{२} - \frac{५}{२}\text{य} = - १, \overline{\text{य}^{२} - \frac{५}{२}\text{य} + \frac{५}{४}}\Big|^{२} = -१ + \frac{२५}{१६} = \frac{९}{१६},$$

$$\text{य} - \frac{५}{४} = \pm \frac{३}{४} \therefore \text{य} = \frac{५ \pm ३}{४} = २;$$

∴ १, २, ४ ह्या त्या तीन संख्या.

१५. भूमिति ममाणांत अशा चार संख्या काढ, कीं ज्यांची बेरीज ४० आहे, आणि ज्यांच्या वर्गांची बेरीज८२०आहे.

त्या चार संख्या दाखवावयास क्ष, क्षय, $\text{क्षय}^{२}$, $\text{क्षय}^{३}$, घे,

तर $\text{क्ष}+\text{क्षय}+\text{क्षय}^{२}+\text{क्षय}^{३}=४०, \therefore \text{क्ष}\,(१+\text{य}+\text{य}^{२}+\text{य}^{३})=४०,$

आणि$\text{क्ष}^{२}+\text{क्ष}^{२}\text{य}^{२}+\text{क्ष}^{२}\text{य}^{४}+\text{क्ष}^{२}\text{य}^{६}=८२०, \therefore \text{क्ष}^{२}(\text{य}^{२}+(१+\text{य}^{४}+\text{य}^{६})=८२०.$

$$\therefore \text{क्ष}\{१+\text{य}^{२}+\text{य}(१+\text{य}^{२})\} = ४०, \text{क्ष}(१+\text{य})(१+\text{य}^{२})=४०, (१)$$

$$\text{क्ष}^{२}\{१+\text{य}^{२}+\text{य}^{४}(१+\text{य}^{२})\} =८२०, \text{क्ष}^{२}(१+\text{य}^{२})(१+\text{य}^{४})=८२०, (२)$$

(१) ह्याचा वर्ग करून त्यास (२) ह्यानें भागल्यानें,

$$\frac{\text{क्ष}^{२}(१+\text{य})^{२}(१+\text{य}^{२})^{२}}{\text{क्ष}^{२}(१+\text{य}^{२})\,(१+\text{य}^{४})} = \frac{१६००}{८२०}, \frac{(१+\text{य})^{२}\cdot(१+\text{य}^{२})}{१+\text{य}^{४}} = \frac{८०}{४१},$$

ह्याचे छेद सोडवून गुणाकारादि केल्यानें,

$$\text{य}^{२} + \frac{१}{\text{य}^{२}} - \frac{८२}{३९}\left(\text{य} + \frac{१}{\text{य}}\right) = \frac{८२}{३९},$$

म्हणून य=३, ∴क्ष=१, ∴१, ३, ९, २७ ह्या त्या चार संख्या.

उदाहरणें.

१. ३, + ६, + १२ + इ०, ६ पदांची बेरीज = १८९.

२. ५ + २० + ८० + इ०, ५ पदांची बेरीज = १७०५.

३. $\frac{३}{२}$ + १ + $\frac{२}{३}$ + इ०, ६ पदांची बेरीज = ४$\frac{१७}{१६२}$.

४. ९, − ६, ४, इ०, श्रेढीचें ८ वें पद = −$\frac{१२८}{२४३}$.

५. ३, $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{१२}$, इ०, श्रेढीचें ६ वें पद = $\frac{१}{२५९२}$.

६. १ − २ + $२^{२}$ − इ०, १० पदांची बेरीज = −३४१.

७. २१ − ३ + $\frac{३}{७}$ − इ०, ५ पदांच्या श्रेढीचें सर्वधन, आणि शेवटील पद काढ. उत्तर. १८$\frac{१२९}{३४३}$, आणि $\frac{३}{३४३}$.

८. −$\frac{१}{२}$, $\frac{१}{३}$, −$\frac{२}{९}$, इ०, श्रेढीचें ५ वें पद = −$\frac{८}{८१}$.

९. $\frac{४}{५}$ + २ + ५ + इ०, ह्या श्रेढींतील नवें पद, आणि न पदांची बेरीज काढ.

उत्तर. $\frac{५^{न-२}}{२^{न-३}}$ आणि $\frac{१}{१५}\left(\frac{५^{न}-२^{न}}{२^{न-३}}\right)$.

१०. $\frac{३}{५}$ + $\frac{१}{२}$ + $\frac{५}{१२}$ + इ०, ८ पदांची बेरीज = $\frac{१२८८९९१}{४६६५६०}$.

११. $\frac{१}{४}$ − $\frac{१}{१६}$ + $\frac{१}{६४}$ − इ०, श्रेढीची मर्यादा काढ. उत्तर. $\frac{१}{५}$.

१२. १ − $\frac{१}{२}$ + $\frac{१}{४}$ − इ०, श्रेढीची मर्यादा काढ. उ०. $\frac{२}{३}$.

१३. २ − १$\frac{१}{३}$ + $\frac{८}{९}$ − इ०, श्रेढीची मर्यादा काढ. उ० १$\frac{१}{५}$.

१४. −३$\frac{१}{५}$ + १$\frac{३}{५}$ − $\frac{४}{५}$ + इ०, श्रेढीची मर्यादा काढ. उ०. −२$\frac{२}{१५}$.

१५. $\frac{१}{२}$ आणि १२८ ह्यांचे मधील तीन भूमितिप्रमाणें काढ.

उत्तर. ± २, ८, ± ३२.

१६. ५ आणि १०८० ह्यांचे मधील दोन भूमिति मध्यप्रमाणें, आणि ९ आणि $\frac{१}{३}$ ह्यांचे मधील तीन भूमितिमध्यप्रमाणें काढ.

उत्तर. ३०, १८०; आणि ३, १, $\frac{१}{३}$.

१७. एका अनंतपद भूमितिश्रेढीचें सर्वधन २ आहे, आणि पहिल्या दोन पदांची बेरीज १$\frac{१}{२}$ आहे; तर ती श्रेढी काढ.

उत्तर. ३-$\frac{३}{२}$ + $\frac{३}{४}$ - इत्यादि.

१८. भूमितिप्रमाणांत अशा तीन संख्या काढ, कीं ज्यांचा गुणाकार ६४ आहे, आणि ज्यांच्या घनांची बेरीज ५८४ आहे.

उत्तर. २, ४, ८.

१९. जर एका अनंतपद भूमितिश्रेढीचें सर्वधन तिचे न पदांच्या बेरजेच्या दुप्पट आहे, तर असें सिद्ध कर कीं तिचें गुणोत्तर=$\left(\frac{१}{२}\right)^{\frac{१}{न}}$

२०. दोन संख्यांचें गणित मध्यप्रमाण आणि भूमिति मध्यप्रमाण ह्यांची बेरीज १३$\frac{१}{२}$ आहे, आणि भूमिति मध्यप्रमाण जर गणित मध्यप्रमाणांतून वजा केलें तर १$\frac{१}{२}$ बाकी राहते; तर त्या दोन संख्या काढ.

उत्तर. ३ आणि १२.

२१. एका शिकारी कुत्र्यापासून एक ससा १०० यार्ड अंतरावर आहे, ते दोघे ही एकाच दिशेस पळतात, आणि कुत्रा सशापेक्षां १०० पट जलद चालतो; तर सशाला गांठावयास कुत्र्यास किती लांब गेलें पाहिजे ? उत्तर. १०१$\frac{१}{९९}$ यार्ड.

२२. एका देशांतील लोक दरसाल भूमितिप्रमाणानें वाढतात, आणि चार वर्षांत त्यांतील लोक १०,००० पासून १४,६४१ झाले; तर दरसाल ते त्यांच्या कितव्या अंशानें वाढले ?

उत्तर. $\frac{१}{१०}$.

२३. एका भूमितिश्रेढींत (प + क) वें पद = म, आणि (प-क) वें पद = न; तर असें सिद्ध कर कीं पवें पद = $\sqrt{मन}$, आणि कवें पद = म$\left(\frac{न}{म}\right)^{\frac{प}{क}}$. आणि जर पवें पद

$=\text{प}_1$, आणि कवें पद $=\text{क}_1$, तर असें सिद्ध कर कीं, नवें पद $=\left(\dfrac{\text{प}_1^{\text{न}-\text{क}}}{\text{क}_1^{\text{न}-\text{प}}}\right)^{\frac{1}{\text{प}-\text{क}}}$.

२४. जर $\dfrac{\text{मअ}+\text{नब}}{\text{म}+\text{न}}$ हें म आणि न ह्यांचें गणितमध्यमप्रमाण आहे, आणि अ आणि ब ह्यांचें भूमितिमध्यप्रमाण आहे, तर म आणि न ह्यांच्या किंमती अ आणि ब ह्या पदांत आण.

२५. एका अनंत पद भूमितिश्रेढीचे पदांची बेरीज स आहे, आणि तिच्या पदांच्या वर्गांची बेरीज स_1 आहे; तर असें सिद्ध कर, कीं तिचे न पदांची बेरीज $=\text{स}\left\{1-\left(\dfrac{\text{स}^2-\text{स}_1^2}{\text{स}^2+\text{स}_1^2}\right)^{\text{न}}\right\}$.

गायनश्रेढी.

(२४). ज्या श्रेढीचे पदांचे व्युत्क्रम गणित प्रमाणांत असतात, त्या श्रेढीस गायनश्रेढी म्हणतात. $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{३}$, $\frac{१}{४}$, $\frac{१}{५}$, इत्या० हीं पदें गायनश्रेढींत आहेत; कारण ह्यांचे व्युत्क्रम गणितप्रमाणांत आहेत. असेंच $\frac{३}{५}$, $\frac{३}{७}$, $\frac{३}{९}$, इ०, आणि $\dfrac{\text{क}}{\text{अ}}$, $\dfrac{\text{क}}{\text{अ}+\text{ब}}$, $\dfrac{\text{क}}{\text{अ}+२\text{ब}}$, इ०, ह्या श्रेढी गायन श्रेढींत आहेत.

म्हणून जर एका गायन श्रेढींतील कांहीं पदें दिलीं असतां त्यांपासून ती श्रेढी चालविणें आहे, तर त्यांचे व्युत्क्रम घेऊन त्यांपासून गणित श्रेढी चालवावी आणि मग ह्या श्रेढींतील पदांचे व्युत्क्रम घ्यावे, म्हणजे ते गायन श्रेढींतील पदें होतील; अथवा समच्छेदांच्या रीतीप्रमाणें पदांचे अंश समकरून छेद गणित प्रमाणानें वाढवावे म्हणजे झालें. उदाहरण, २, $१\frac{१}{२}$, $\frac{६}{५}$,

$\frac{२}{३}$, ह्यांपासून गायन श्रेढीचीं पुढील पदें आणणें झाल्यास $\frac{१}{२}$, $\frac{५}{६}$, $\frac{७}{६}$, $\frac{३}{२}$, हीं पदें घेऊन गणित श्रेढीचीं पुढील पदें आणावीं; तीं $\frac{११}{६}$, $\frac{१३}{६}$, $\frac{५}{२}$, इत्यादि येतात, ह्मणून $\frac{६}{११}$, $\frac{६}{१३}$, $\frac{२}{५}$, इ०, हीं गायन श्रेढीचीं पुढील पदें आहेत. अथवा दिलेल्या पदांस भागजाति अपूर्णांकाचें रूप देऊन नंतर त्यांस समांश करून व छेद गणित प्रमाणानें वाढवून आलेलीं पदें $\frac{६}{११}$, $\frac{६}{१३}$, $\frac{२}{५}$, इ० गायन-श्रेढीचीं पुढील पदें आहेत.

सिद्धांत.

१. जर तीन पदें गायन प्रमाणांत आहेत, तर पहिल्यास जसें तिसरें तशी पहिलें आणि तिसरें ह्यांची वजाबाकी दुसरें आणि तिसरें ह्यांचे वजाबाकीस आहे.*

$\because$ जर अ, ब, क, हीं तीन पदें गायनप्रमाणांत आहेत,

तर $\frac{१}{अ}, \frac{१}{ब}, \frac{१}{क}$, हीं पदें गणित प्रमाणांत आहेत.

$$\therefore (२२ \text{ क० प्र०}) \frac{१}{अ} - \frac{१}{ब} = \frac{१}{ब} - \frac{१}{क}, \frac{ब-अ}{अब} = \frac{क-ब}{बक},$$

$$\therefore \frac{अ}{क} = \frac{अ-ब}{ब-क}, \therefore अ : क :: अ-ब : ब-क.$$

कुर०. ह्यावरून असें सिद्ध होतें, कीं जर कोणतीं ही तीन पदें वर सांगितलेल्या प्रमाणांत आहेत, तर तीं गायनप्रमाणांत आहेत.

२. कोणत्याही दोन संख्यांचें गायन मध्यप्रमाण, त्या दोहोंचें गुणाकाराचे दुपटीस त्यांचेच बेरजेनें भागून जो भागाकार येतो, त्याबरोबर असतें.

---

* किती एक ग्रंथकार गायनप्रमाणाचें हेंच लक्षण सांगून, पदांची उलट गणितप्रमाणांत असते हें मागून सिद्ध करतात.

$\because$ (१ सि० म०) $\frac{अ}{क} = \frac{अ-ब}{ब-क}$, अब-अक=अक-बक,

अब+बक=२अक, $\therefore$ ब (गायनमध्यप्रमाण) = $\frac{२अक}{अ+क}$.

३. जर तीन पदें गायनप्रमाणांत असतील तर तिसरें पद, पहिलें आणि दुसरें ह्यांचे गुणाकारास पहिल्याचे दुपटींतून दुसरें वजाकरून जी बाकी राहील तिनें भागून जो भागाकार येतो, त्याबरोबर असतें.

$\because$(१ सि० म०)अब-अक=अक-बक, $\therefore$ क= $\frac{अब}{२अ-ब}$.

४. गायनश्रेढींत कोणत्याही दोन जवळ जवळ पदांचा गुणाकार दुसऱ्या कोणत्याही दोन जवळ जवळ पदांचे गुणाकारास आहे, तशी पहिल्या दोन पदांची वजाबाकी दुसऱ्या दोन पदांचे वजाबाकीस आहे.

$\because$ अ, ब, क, ····· ख, ह, ही एक गायनश्रेढी घे, तर हींतील पदांचे व्युत्क्रम गणितप्रमाणांत आहेत.

$\therefore$(२२कल०म०) $\frac{१}{अ} - \frac{१}{ब} = \frac{१}{ख} - \frac{१}{ह}, \frac{ब-अ}{अब} = \frac{ह-ख}{खह}$,

$\frac{अब}{खह} = \frac{अ-ब}{ख-ह}$, $\therefore$ अब : खह : अ - ब : ख - ह.

५. गायनश्रेढींतील अ आणि ब हीं पहिलीं दोन पदें दिलीं असतां त्यांपासून नवें पद ज्ञ, खालचे सारणीनें काढतां येतें;

$$ज्ञ = \frac{अब}{(न-१)अ-(न-२)ब}.$$

$\because$ (२२ कल० म०) $\frac{१}{ब} - \frac{१}{अ} = \frac{अ-ब}{अब}$ = ड = उत्तर,

आणि (२२ क० सि० म०) $\frac{१}{ज्ञ} = \frac{१}{अ} + (न-१) \left\{ ड = \frac{अ-ब}{अब} \right\}$

$$= \frac{(\text{न} - १)\text{अ} - (\text{न} - २)\text{ब}}{\text{अब}} = \text{अंत्यपद},$$

$$\therefore \text{ज्ञ} = \frac{\text{अब}}{(\text{न}-१)\text{अ}-(\text{न}-२)\text{ब}}.$$

६. अ आणि ब ह्यांच्या मध्यें न गायन मध्यममाणें घालणें झाल्यास $\frac{१}{\text{अ}}$ आणि $\frac{१}{\text{ब}}$ ह्यांच्या मध्यें न गणित मध्यमप्रमाणें घालून त्याचे व्युत्क्रम घ्यावे, म्हणजे ते गायन मध्यममाणें दाखवितील.

उदाहरणें.

१. २ आणि $\frac{१}{५}$ ह्यांच्यामध्यें दोन गायन मध्यममाणें घाल.

$\frac{२}{१}$, $\frac{१}{५}$ हीं चार पदांच्या गायन श्रेढीचीं आद्यंत पदें आहेत,

$\therefore$ $\frac{१}{२}$, ५ .... गणितश्रेढीचीं ....

(२२ कल० ४ उदा० म०) $\text{ड} = \frac{\text{ल}-\text{अ}}{\text{न}-१} = \frac{५-\frac{१}{२}}{४-१} = \frac{४\frac{१}{२}}{३} = \frac{९}{६} = \frac{३}{२},$

$$\left.\begin{aligned} \therefore \frac{१}{२} + \frac{३}{२} &= २ \\ २ + \frac{३}{२} &= \frac{७}{२} \end{aligned}\right\} \text{ हीं गणित मध्यममाणें आहेत.}$$

$\therefore$ $\frac{१}{२}$, $\frac{२}{७}$ हीं गायन मध्यममाणें आहेत.

२. एका गायनश्रेढीच्या तीन पदांची बेरीज १ $\frac{१}{१२}$ आहे, आणि तींतील पहिलें पद $\frac{१}{२}$ आहे; तर ती श्रेढी काढ, आणि ती दोन्ही बाजूंनीं वाढीव.

दुसरें पद = क्ष, आणि तिसरें पद = य घे,

तर $\frac{१}{२}$ + क्ष + य = $\frac{१३}{१२}$, $\therefore$ क्ष + य = $\frac{१३}{१२} - \frac{६}{१२} = \frac{७}{१२}$,

परंतु गायन प्रमाणाप्रमाणें, $\text{ब} = \frac{\text{२ अक}}{\text{अ} + \text{क}}$,

$\therefore \text{क्ष} = \frac{\text{२}\times\frac{\text{१}}{\text{२}}\text{य}}{\frac{\text{१}}{\text{२}} + \text{य}} = \frac{\text{य}}{\text{य}+\frac{\text{१}}{\text{२}}} = \frac{\text{२ य}}{\text{२य+१}}$, परंतु (१) $\text{क्ष} = \frac{\text{७}}{\text{१२}} - \text{य}$,

$\therefore \frac{\text{७}}{\text{१२}} - \text{य} = \frac{\text{२ य}}{\text{२य+१}}$, $\therefore \text{य} = \frac{\text{१}}{\text{४}}$, $\therefore \text{क्ष} = \frac{\text{१}}{\text{३}}$;

$\therefore \frac{\text{१}}{\text{२}}, \frac{\text{१}}{\text{३}}, \frac{\text{१}}{\text{४}}$, इ० = गायनश्रेढी; $\therefore$ २,३,४, इ० = गणितश्रेढी;

$\therefore$ -१,०,१,२, ३, ४,इ० = दोन्हीकडून वाढविलेली गणितश्रेढी;

$\therefore -\frac{\text{१}}{\text{१}}, \frac{\text{१}}{\text{०}}, \frac{\text{१}}{\text{१}}, \frac{\text{१}}{\text{२}}, \frac{\text{१}}{\text{३}}, \frac{\text{१}}{\text{४}}$, इ०=दोन्हीकडून वाढविलेली गायनश्रेढी;

$\therefore$ - १, ∞, १, $\frac{\text{१}}{\text{२}}, \frac{\text{१}}{\text{३}}, \frac{\text{१}}{\text{४}}$, इ० = उत्तर.

३. गायनप्रमाणांत अशा तीन संख्या काढ, कीं ज्यांची बेरीज ११ आहे, व ज्यांच्या वर्गांची बेरीज ४९ आहे.

आद्यंत पदें दाखवायास क्ष आणि य घे,

तर $\frac{\text{२ क्षय}}{\text{क्ष} + \text{य}}$ मध्यप्रमाण.

$$\text{क्ष+य} + \frac{\text{२ क्षय}}{\text{क्ष} + \text{य}} = \text{११}, \quad \cdots\cdots (\text{१})$$

$$\text{क्ष}^{\text{२}} + \text{य}^{\text{२}} + \frac{\text{४ क्ष}^{\text{२}}\text{य}^{\text{२}}}{(\text{क्ष+य})^{\text{२}}} = \text{४९}, \quad \cdots\cdots (\text{२})$$

$$(\text{१}) \frac{\text{२ क्षय}}{\text{क्ष} + \text{य}} = \text{११} - (\text{क्ष} + \text{य}),$$

$$\therefore \frac{\text{४क्ष}^{\text{२}}\text{य}^{\text{२}}}{(\text{क्ष+य})^{\text{२}}} = \text{१२१} - \text{२२}(\text{क्ष+य}) + \text{क्ष}^{\text{२}} + \text{२क्षय} + \text{य}^{\text{२}}$$

$$(\text{२}) \frac{\text{४ क्ष}^{\text{२}}\text{य}^{\text{२}}}{(\text{क्ष+य})^{\text{२}}} = \text{४९} \qquad - \text{क्ष}^{\text{२}} \qquad - \text{य}^{\text{२}}$$

वजाबाकीनें

$$= \text{७२} - \text{२२}(\text{क्ष+य}) + \text{२क्ष}^{\text{२}} + \text{२क्षय} + \text{२य}^{\text{२}}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \therefore & क्ष^2 + क्षय + य^2 = ११(क्ष + य) - ३६ \\ (१) & क्ष^2 + ४क्षय + य^2 = ११(क्ष + य) \end{array}\right\}$$ वजाबाकी घे.

$$३क्षय = ३६, \therefore क्षय = १२,$$

$$\left.\begin{array}{l} क्ष^2 + क्षय + य^2 - ११(क्ष + य) = -३६ \\ क्षय = १२ \end{array}\right\}$$ बेरीज घे.

$$क्ष^2 + २क्षय + य^2 - ११(क्ष + य) = -२४, \therefore क्ष + य = ८;$$

$\therefore$ क्ष = ६, $\therefore$ य = २, $\therefore$ २, ३, ६. उत्तर.

४. जर $\frac{अ - ब}{ब - क} = \frac{अ}{अ}, \frac{अ}{ब},$ किंवा $\frac{अ}{क}$; तर असें सिद्ध कर कीं अ, ब, क, हीं पदें अनुक्रमें गणित प्रमाणांत, भूमितिप्रमाणांत, किंवा गायनप्रमाणांत आहेत.

$\because$ जर $\frac{अ - ब}{ब - क} = \frac{अ}{अ} = १$, तर अ - ब = ब - क,

$\therefore$ अ, ब, क, गणितप्रमाणांत आहेत.

आणि जर $\frac{अ - ब}{ब - क} = \frac{अ}{ब}$, तर $अब - ब^2 = अब - अक$,

$\therefore ब^2 = अक$, $\therefore$ अ,ब,क, भूमितिप्रमाणांत आहेत.

...... $\frac{अ - ब}{ब - क} = \frac{अ}{क}$, तर अ:क: :अ - ब : ब - क,

$\therefore$ अ, ब, क, गायनप्रमाणांत आहेत.

५. अ आणि ब ह्यांचें गणितमध्यप्रमाण, भूमितिमध्यप्रमाण, आणि गायनमध्यप्रमाण, हीं अनुक्रमें न, म, प, आहेत; तर असें सिद्ध कर कीं म = न आणि प ह्यांचे भूमितिमध्यप्रमाण; आणि न $>$ म $>$ प.

$\because$ अ, ब, ह्यांचे गणितमध्यप्रमाण = न = $\frac{अ + ब}{२}$,

............भूमिति .....= $म = \sqrt{अब}$,

............गायन .....= $प = \frac{२ अब}{अ + ब}$;

$\therefore नप = \frac{अ + ब}{२} \times \frac{२ अब}{अ + ब} = अब = म^२$.

∴ (२३क०सि०कु०म०)म=न आणि प ह्यांचे भूमितिमध्यम०

पुनः, (१८क० १उदा०म०) $\frac{अ}{२} + \frac{ब}{२} > २ . \sqrt{\frac{अ}{२}} . \sqrt{\frac{ब}{२}}$,

म्हणजे $\frac{अ+ब}{२} > \sqrt{अब}$, $\therefore न > म$;

असेंच, $प = \frac{२अब}{अ+ब} = \frac{अब}{\frac{अ+ब}{२}} = \frac{म \cdot म}{न}$,

परंतु $न > म$, $\therefore म > प$, $\therefore न > म > प$.

उदाहरणें.

१. २ आणि ४ ह्यांचेमध्यें दोन गायन मध्यममाणें घाल.

उत्तर. $२\frac{२}{५}$, ३.

२. ४ आणि $१\frac{५}{७}$ ह्यांचे मध्यें तीन गायन मध्यममाणें घाल.

उत्तर. ३, $२\frac{२}{५}$, २.

३. $३\frac{३}{८}$ आणि $१\frac{१}{२}$ ह्यांचें गणितमध्यममाण, भूमितिमध्यममाण, आणि गायनमध्यममाण काढ.

उत्तर. $२\frac{७}{१६}$, $२\frac{१}{४}$, $२\frac{१}{१३}$.

४. $\frac{१}{५}$ आणि $\frac{१}{११}$ ह्यांचे मध्यें दोन गायनमध्यममाणें घाल.

उत्तर. $\frac{१}{७}$, $\frac{१}{९}$.

५. $१\frac{१}{२}$, $२\frac{१}{७}$, $३\frac{३}{४}$ ही श्रेणी दोन्ही बाजूंनीं तीन तीन पदांपर्यंत वाढीव.

उत्तर. $\frac{१५}{१९}$, $\frac{१५}{१६}$, $१\frac{२}{१३}$, . . . १५, $-७\frac{१}{२}$, -३.

६. अशा दोन संख्या काढ, कीं ज्यांची वजाबाकी ८ आहे, व ज्यांचें गायनमध्यप्रमाण $१\frac{४}{५}$ आहे.

उत्तर. ९ आणि १, अथवा $\frac{४}{५}$ आणि $-७\frac{१}{५}$.

७. दोन संख्यांचें गायनमध्यप्रमाण २ आहे, आणि त्यांची बेरीज $४\frac{४}{३५}$ आहे, तर त्या दोन संख्या काढ.

उत्तर. $२\frac{२}{५}$, $१\frac{५}{७}$.

८. दोन संख्यांचें गणितमध्यप्रमाणाची आणि गायनमध्यप्रमाणाची बेरीज $१२\frac{५}{७}$ आहे, आणि गायनमध्यप्रमाण गणितमध्यप्रमाणांत वजा केलें असतां बाकी $१\frac{२}{७}$ राहते; तर त्या दोन संख्या काढ. उत्तर. ४ आणि १०.

९. क्ष आणि य ह्यांचें भूमितिमध्यप्रमाण : त्यांचें गायनमध्यप्रमाण : : म : न, तर असें सिद्ध कर कीं क्ष : य : : म $+\sqrt{(\text{म}^२ - \text{न}^२)}$: म $- \sqrt{(\text{म}^२ - \text{न}^२)}$.

१०. १ + १ + २ + ३ + ५ + ८ + इत्यादि, ह्या श्रेढींत प्रत्येक पद त्याचे पाठीमागल्या दोन पदांच्या बेरजे बरोबर आहे; तर हींतील न पदांची बेरीज काढ.

$$\text{उत्तर. } \frac{१}{\sqrt{५}}\left\{\left(\frac{१+\sqrt{५}}{२}\right)^{\text{न}+२} - \left(\frac{१-\sqrt{५}}{२}\right)^{\text{न}+२}\right\} - १.$$

प्रकरण ९.

द्विपद करणी.

सिद्धांत.

(२५). १. कोणत्या ही पदाचें वर्गमूळ खंडपद आणि अखंडपद मिळून होणार नाहीं.

जर होत असेल, तर $\sqrt{\text{क्ष}} = \text{अ} + \sqrt{\text{य}}$ घे,

तर $क्ष = अ^2 + २अ\sqrt{य} + य$, $\therefore क्ष - य - अ^2 = २अ\sqrt{य}$,

$\therefore \frac{क्ष - य - अ^2}{२ अ} = \sqrt{य}$, म्हणजे अखंड पद = खंड-पद, हें होणें अशक्य आहे.

२. $अ + \sqrt{क्ष} = ब + \sqrt{य}$ हें अखंड पद आणि खंड-पद ह्यांचें एक समीकरण असेल, तर $अ = ब$, आणि $\sqrt{क्ष} = \sqrt{य}$.

कारण, $\sqrt{क्ष} = ब - अ + \sqrt{य}$, आणि जर $ब - अ = ०$ नसेल, तर $\sqrt{क्ष}$ अखंडपद व खंडपद मिळून होईल.

परंतु हें होणें १ ले सिद्धांतावरून अशक्य आहे,

ह्मणून $ब - अ = ०$, ह्मणजे $अ = ब$, $\therefore \sqrt{क्ष} = \sqrt{य}$.

३. दोन भिन्न भिन्न करणींचा गुणाकार खंड आहे.

जर नसेल, तर $\sqrt{क्ष} \times \sqrt{य} = अक्ष$ घे, तर $क्षय = अ^2क्ष^2$,

$य = अ^2क्ष$, $\therefore \sqrt{य} = अ\sqrt{क्ष}$; ह्मणजे $\sqrt{य}$ आणि $\sqrt{क्ष}$ ह्यांस एकच जातीचा करणीरूप गुणक आहे, परंतु हें आपले मूळकल्पनेस अगदीं विरुद्ध आहे.

४. ज्या द्विपदांत एक अखंडपद आणि एक खंडपद हीं आहेत त्याचें वर्गमूळ काढावयाचें.

$अ + \sqrt{ब}$ हें दिलेलें द्विपद आहे, असें मान.

$\sqrt{अ + \sqrt{ब}} = \sqrt{क्ष} + \sqrt{य}$, असें घे; दोन्ही बाजूंचा वर्ग कर.

$$अ + \sqrt{ब} = क्ष + २\sqrt{क्षय} + य,$$

$\therefore$ (२ सि० म०) $क्ष + य = अ$, $२\sqrt{क्षय} = \sqrt{ब}$,

$क्ष^2 + २ क्षय + य^2 = अ^2$, $४ क्षय = ब$,

$क्ष^2 - २ क्षय + य^2 = अ^2 - ब$, $\therefore क्ष - य = \sqrt{अ^2 - ब}$

$$क्ष + य = अ$$

$$२क्ष = अ + \sqrt{अ^२ - ब},$$

$$२य = अ - \sqrt{अ^२ - ब},$$

$$\therefore क्ष = \frac{अ + \sqrt{अ^२ - ब}}{२},\ य = \frac{अ - \sqrt{अ^२ - ब}}{२},$$

$$\therefore \sqrt{अ + \sqrt{ब}} = \sqrt{क्ष} + \sqrt{य} =$$

$$\pm\sqrt{\frac{अ + \sqrt{अ^२ - ब}}{२}} \pm \sqrt{\frac{अ - \sqrt{अ^२ - ब}}{२}}.$$

उदाहरणें.

१. $७ \pm ४\sqrt{३}$ ह्यांचें वर्गमूळ काढ.

$\sqrt{७ \pm ४\sqrt{३}} = \sqrt{क्ष} \pm \sqrt{य}$ असें घे,

तर $७ \pm ४\sqrt{३} = क्ष \pm २\sqrt{क्षय} + य,$

$\therefore क्ष + य = ७,\ \pm २\sqrt{क्षय} = \pm ४\sqrt{३},$

$क्ष^२ + २\,क्षय + य^२ = ४९,\ ४\,क्षय = ४८$

$\therefore क्ष^२ - २\,क्षय + य^२ = १,\ \therefore \left.\begin{matrix} क्ष - य = १ \\ क्ष + य = ७ \end{matrix}\right\} \therefore \begin{matrix} क्ष = ४, \\ य = ३, \end{matrix}$

$\therefore \sqrt{७ \pm ४\sqrt{३}} = \sqrt{क्ष} \pm \sqrt{य} = २ \pm \sqrt{३}.$

टीप. $\sqrt{अ + \sqrt{ब}} = \pm\sqrt{\frac{अ + \sqrt{अ^२ - ब}}{२}} \pm \sqrt{\frac{अ - \sqrt{अ^२ - ब}}{२}},$

ह्या सारणींत $अ = ७$ आणि $\sqrt{ब} = ४\sqrt{३} = \sqrt{४८}$ धरल्यानें हें उदाहरण सोडवितां येईल;

म्हणजे $\sqrt{७ \pm ४ \sqrt{३}} =$

$$\pm \sqrt{\frac{७+\sqrt{४९-४८}}{२}} \pm \sqrt{\frac{७-\sqrt{४९-४८}}{२}} = \pm २ \pm \sqrt{३}.$$

ह्याप्रमाणेंच पुढील सर्व उदाहरणें सोडविलीं असतां लौकर होतील.

२. $४९ + २० \sqrt{६}$ ह्यांचें चतुर्घातमूळ काढ.

$\sqrt{४९+२० \sqrt{६}} = \sqrt{क्ष} + \sqrt{य}$, असें घे;

तर $४९ + २० \sqrt{६} = क्ष + य + २ \sqrt{क्षय}$,

$\therefore क्ष + य = ४९,\ २ \sqrt{क्षय} = २० \sqrt{६}$,

$\therefore क्ष^{२} + २ क्षय + य^{२} = २४०१,\ ४ क्षय = २४००$,

$\therefore क्ष^{२}-२क्षय+य^{२}=१,\ \therefore \left.\begin{matrix} क्ष-य=१, \\ क्ष+य=४९ \end{matrix}\right\} \therefore \begin{matrix} क्ष=२५=५^{२}, \\ य=२४=४\times६, \end{matrix}$

$\therefore \sqrt{४९\pm२० \sqrt{६}} = \sqrt{क्ष} + \sqrt{य} = ५ \pm २ \sqrt{६}$;

पुनः, $\sqrt{५ \pm २ \sqrt{६}} = \sqrt{क्ष} \pm \sqrt{य}$ असें घे,

तर $५ \pm २ \sqrt{६} = क्ष + य \pm २ \sqrt{क्षय}$,

$\therefore क्ष + य = ५,\ \pm २ \sqrt{क्षय} = \pm २ \sqrt{६}$,

$क्ष^{२} + २ क्षय + य^{२} = २५,\ ४ क्षय = २४$,

$क्ष^{२} + य^{२} - २ क्षय = १,\ \left.\begin{matrix} क्ष - य = १, \\ क्ष + य = ५ \end{matrix}\right\} \therefore \begin{matrix} क्ष = ३, \\ य = २, \end{matrix}$

$\therefore \sqrt[४]{४९\pm२०\sqrt{६}}=\sqrt{५\pm२\sqrt{६}}=\sqrt{क्ष}\pm\sqrt{य}=\sqrt{३}\pm\sqrt{२}.$

३. $- १$ ह्याचें अष्टघातमूळ काढ.

$- १$ ह्याचें वर्गमूळ $= \sqrt{-१}$, किंवा $० + \sqrt{-१}$;

$\sqrt{० + \sqrt{-१}} = \sqrt{क्ष} + \sqrt{य}$, असें घे;

तर $क्ष + य + २\sqrt{क्षय} = ० + \sqrt{-१}$,

$क्ष + य = ०,\ २\sqrt{क्षय} = \sqrt{-१}$,

$क्ष^२ + २\,क्षय + य^२ = ०$,

$४\,क्षय = -१$

$क्ष^२ - २\,क्षय + य^२ = १$,

$\therefore क्ष - य = १$

$क्ष + य = ०$

$२क्ष = १,\ \therefore क्ष = \frac{१}{२},\ \sqrt{क्ष} = \sqrt{\frac{१}{२}}$,

$२य = -१,\ \therefore य = -\frac{१}{२},\ \sqrt{य} = \sqrt{-\frac{१}{२}}$,

$\therefore \sqrt{क्ष} + \sqrt{य} = \sqrt{\frac{१}{२}} + \sqrt{-\frac{१}{२}}$,

$\therefore \sqrt{\sqrt{-१}} = \sqrt{\frac{१}{२}} + \sqrt{-\frac{१}{२}}$;

$\sqrt{\sqrt{\frac{१}{२}} + \sqrt{-\frac{१}{२}}} = \sqrt{क्ष} + \sqrt{य}$ असें घे,

तर $क्ष + य + २\sqrt{क्षय} = \sqrt{\frac{१}{२}} + \sqrt{-\frac{१}{२}}$,

$क्ष + य = \sqrt{\frac{१}{२}},\ २\sqrt{क्षय} = \sqrt{-\frac{१}{२}}$,

$क्ष^२ + २\,क्षय + य^२ = \frac{१}{२}$,

$४\,क्षय = -\frac{१}{२}$

$क्ष^२ - २\,क्षय + य^२ = १$,

$क्ष - य = १$

$क्ष + य = \sqrt{\frac{१}{२}}$

$२क्ष = १ + \sqrt{\frac{१}{२}},\ \therefore क्ष = \frac{१}{२} + \frac{१}{२}\sqrt{\frac{१}{२}}$,

$२\,य = \sqrt{\frac{१}{२}} - १,\ \therefore य = \frac{१}{२}\sqrt{\frac{१}{२}} - \frac{१}{२}$,

$\therefore \sqrt{क्ष} = \sqrt{\frac{१}{२} + \frac{१}{२}\sqrt{\frac{१}{२}}},\ \sqrt{य} = \sqrt{\frac{१}{२}\sqrt{\frac{१}{२}} - \frac{१}{२}}$,

$\therefore \sqrt{क्ष} + \sqrt{य} = \sqrt{\frac{१}{२} + \frac{१}{२}\sqrt{\frac{१}{२}}} + \sqrt{\frac{१}{२}\sqrt{\frac{१}{२}} - \frac{१}{२}}$,

$$\therefore \sqrt[८]{-१} = \sqrt{\tfrac{१}{२} + \tfrac{१}{२}\sqrt{\tfrac{१}{२}}} + \sqrt{\tfrac{१}{२}\sqrt{\tfrac{१}{२}} - \tfrac{१}{२}}.$$

$$= \text{सुमारें, } \cdot ९२३९ + \cdot ३८२७ \sqrt{-१}.$$

उदाहरणें.

१. $२ + \sqrt{३}$, $८ + २\sqrt{७}$, आणि $४ - \sqrt{७}$ ह्यांचें वर्गमूळ काढ.

उत्तर. $\sqrt{\tfrac{३}{२}} + \sqrt{\tfrac{१}{२}}$, $१ + \sqrt{७}$, आणि $\sqrt{\tfrac{७}{२}} - \sqrt{\tfrac{१}{२}}$.

२. $८ - २\sqrt{१५}$, आणि $- १ - ४\sqrt{-३}$ ह्यांचें वर्गमूळ काढ. उत्तर. $\sqrt{५} - \sqrt{३} \cdot २ - \sqrt{-३}$.

३. $१ + \sqrt{१ - म^२}$, आणि $३\sqrt{३} + २\sqrt{६}$, ह्यांचें वर्गमूळ काढ. उत्तर. $\sqrt{\dfrac{१+म}{२}} + \sqrt{\dfrac{१-म}{२}}$, $\sqrt[४]{३}(१+\sqrt{२})$.

४. $१४ + ८\sqrt{३}$, आणि $\tfrac{१७}{३} - ४\sqrt{२}$ ह्याचें चतुर्घात मूळ काढ.

उत्तर. $\dfrac{\sqrt{३}+१}{\sqrt[४]{२}}$ आणि $\sqrt[४]{\tfrac{१}{३}}(१ - \sqrt{२})$.

प्रकरण १०.

अनिश्चित वेळाप्रकाशक.

(२६). $अ + बक्ष + कक्ष^२ + \cdots = ऊ + घक्ष + मक्ष^२ + \cdots$ हें समीकरण क्षची कोणतीही किंमत धरली असतां खरें आहे असें मानलें, तर क्षच्या सारख्या घातांचे वेळा

प्रकाशक बरोबर होतील; ह्मणजे अ = ੳ, ब = घ, क = म, इत्यादि.

∵ अ-ੳ+बक्ष-घक्ष + कक्ष^{२}-मक्ष^{२} + इत्यादि = ०,

ह्मणजे, अ ∽ ੳ + (ब∽घ) क्ष+(क∽म)क्ष^{२}+इ० = ०;

आतां, अ ∽ ੳ = ० नसेल, तर त्याच्या बरोबर एकादें अविकारी पद म घे,

तर, (ब∽घ) क्ष + (क ∽ म) क्ष^{२} +· · · · · = म;

आणि ∵ अ आणि ੳ हीं अविकारी पदें आहेत,

ह्मणून अ ∽ ੳ ह्मणजे म हें अविकारी पद आहे. परंतु ∵ क्षपदांत जसजसा फेरफार होईल त्याप्रमाणें म पदाच्या भिन्न भिन्न किमती होतील, ∴ म पद विकारी आहे; ह्मणजे म हें पद अविकारी आणि विकारी आहे, हें असणें अशक्य आहे;

∴ अ ∽ ੳ = ०, ह्मणजे अ = ੳ.

पुनः, ब - घ + (क - म) क्ष + · · · · · · · · = ०,

∴ वरल्या प्रमाणेंच ब = घ, आणि क = म, इत्यादि,

जर अ+बक्ष+कक्ष^{२}+· · · ·अ′य+ब′क्षय+· · ·+क′य^{२}+· · ·=

ੳ+घक्ष+मक्ष^{२}+· · ·+ੳ′य+घ′क्षय+· · ·+म′य^{२}+· · ·

आणि य पद विकारी असतां क्षपदास जर कांहीं एकादी अविकारी किंमत दिली, तर वरल्याप्रमाणेंच असें दाखवितां येईल, कीं

अ = ੳ, ब=घ, क=म, अ′=ੳ′, ब′= घ′, क′=म′, इत्यादि.

उदाहरणें.

१. अशी कांहीं अपूर्णपदें काढ, कीं ज्यांची बेरीज

$$= \frac{\text{२क्ष}}{(\text{क्ष}^{२}+१)(\text{क्ष}^{२}+३)}$$

$$\frac{\text{२क्ष}}{(\text{क्ष}^{२}+१)(\text{क्ष}^{२}+३)} = \frac{\text{अक्ष}}{\text{क्ष}^{२}+१} + \frac{\text{बक्ष}}{\text{क्ष}^{२}+३} \text{ असें घे, तर}$$

$$= \frac{\text{अक्ष}^{३}+\text{३अक्ष}+\text{बक्ष}^{३}+\text{बक्ष}}{(\text{क्ष}^{२}+१)(\text{क्ष}^{२}+३)},$$

$$\therefore \text{२क्ष} = (\text{अ}+\text{ब})\,\text{क्ष}^{३} + (\text{३अ}+\text{ब})\,\text{क्ष},$$

$$\therefore २ = \text{३अ}+\text{ब},\ \text{आणि}\ (\text{अ}+\text{ब})\,\text{क्ष}^{३} = ०,\ \therefore \text{अ} = -\text{ब},$$

$$\therefore २ = -\text{३ब}+\text{ब} = -\text{२ब},\ \therefore \text{ब} = -१,\ \therefore \text{अ} = १;$$

$$\therefore \frac{\text{२क्ष}}{(\text{क्ष}^{२}+१)(\text{क्ष}^{२}+३)} = \frac{\text{क्ष}}{\text{क्ष}^{२}+१} - \frac{\text{क्ष}}{\text{क्ष}^{२}+३}.$$

२. $\text{य}^{३}-\text{३य}+\text{क्ष} = ०$, तर यची किंमत क्षच्या चढत्या घातांत काढ.

$$\text{य} = \text{अक्ष} + \text{बक्ष}^{३} + \text{कक्ष}^{५} + \text{डक्ष}^{७} + \text{इ०, असें घे;}$$

$$\left.\begin{array}{rl} \text{तर}\ \ \text{य}^{३} = & \text{अ}^{३}\text{क्ष}^{३} + \text{३अ}^{२}\text{बक्ष}^{५} + \text{३अ}^{२}\text{कक्ष}^{७} + \text{इ०} \\ & \qquad\qquad + \text{३अब}^{२}\text{क्ष}^{७} + \text{इ०} \\ -\text{३य} = & -\text{३अक्ष}-\text{३बक्ष}^{३}-\text{३कक्ष}^{५}-\text{३डक्ष}^{७}- \text{इ०} \\ +\text{क्ष} = & +\text{क्ष} \end{array}\right\} = ०,$$

आणि क्षच्या सारख्या घातांच्या वेळा प्रकाशकांचें समीकरण केल्यानें,

$$-\text{३अ} = -१,\ \therefore \text{अ} = \frac{१}{३};\ \text{अ}^{३} = \text{३ब},\ \therefore \text{ब} = \frac{\text{अ}^{३}}{३} = \frac{१}{३^{४}};$$

$$३\,\text{अ}^{२}\text{ब} = ३\,\text{क},\ \therefore \text{क} = \text{अ}^{२}\text{ब} = \frac{१}{३^{६}},\ \text{इत्यादि;}$$

$$\therefore \text{य} = \frac{\text{क्ष}}{३} + \frac{\text{क्ष}^{३}}{३^{४}} + \frac{\text{क्ष}^{५}}{३^{६}} + \frac{\text{क्ष}^{७}}{३^{८}} + \frac{\text{क्ष}^{९}}{३^{१०}} + \text{इ०}.$$

$\text{य} = \text{अक्ष} + \text{बक्ष}^{२} + \text{कक्ष}^{३} + \text{डक्ष}^{४} + \text{इ०}$, असें जर आपण घेतलें असतें, तर क्षच्या समघातांचे वेळाप्रकाशक शून्य आले असते.

उदाहरणें.

१. अशीं कांहीं अपूर्णपदें काढ, कीं त्यांची बेरीज = $\frac{क्ष^२}{(क्ष^२-१)(क्ष-२)}$.

उत्तर. $\frac{४}{३(क्ष-२)} - \frac{१}{२(क्ष-१)} + \frac{१}{६(क्ष+१)}$.

२. असें सिद्ध कर कीं $\frac{१ + २ क्ष}{१ - क्ष - क्ष^२} =$

$१ + ३ क्ष + ४ क्ष^२ + ७ क्ष^३ + ११ क्ष^४ +$ इत्यादि.

३. असें सिद्धकर कीं $\sqrt{१+क्ष} = १ + \frac{१}{२} क्ष - \frac{१}{८} क्ष^२ + \frac{१}{१६} क्ष^३ -$ इत्या०.

४. असें सिद्ध कर कीं $१^२+२^२+३^२+४^२ +$ इ० $+ न^२ =$ $\frac{न(न+१)(२न+१)}{६}$

प्रकरण ११.

लागरथम.

(२७). $अ^{क्ष} = न$, तर अपायास क्ष हें न संख्येचें लागरथम आहे असें म्हणतात, आणि हें $क्ष = {}^{लाग॰न}अ$ ह्या समीकरणानें दाखवितात. लागरथमाची जी रीति प्रचारांत आहे तींत अची किंमत = १०, आणि ०, १, २, ३, ४, ... क्ष, हीं १, १०, १००, १०००, १००००, ... $१०^{क्ष}$, ह्या संख्यांचीं लागरथमें आहेत; म्हणजे ज्यांचीं लागरथमें घ्यावयाचीं त्या संख्या भू-

मिति श्रेढींत आहेत, आणि त्यांचीं लागरथमें गणित श्रेढींत आहेत.

$\text{अ}^{\text{क्ष}} = \text{न}$ ह्या समीकरणांतून क्षची किंमत काढून तिचे योगानें लागरथमिक कोष्टकें तयार केलीं आहेत. ह्या समीकरणापासून क्षची किंमत कशी काढावी, हें पुढें २९व्या कलमांत सांगितलें आहे.

सिद्धांत.

१. दोन संख्यांच्या लागरथमांची बेरीज त्या दोन संख्यांच्या गुणाकाराचें लागरथम आहे.

∴ (पाया अ धरून) क्ष = लाग० न, य = लाग० न' घे,

तर $\text{अ}^{\text{क्ष}} = \text{न}$, $\text{अ}^{\text{य}} = \text{न}'$, ∴ $\text{अ}^{\text{क्ष}}\text{अ}^{\text{य}} = \text{नन}'$, म्हणजे $\text{अ}^{\text{क्ष+य}} = \text{नन}'$.

दोंहोंहून अधिकही संख्या असल्या तरी ह्याप्रमाणेंच जाणावें.

२. दोन संख्यांच्या लागरथमांची वजाबाकी त्या दोन संख्यांच्या भागाकाराचें लागरथम आहे.

∵ $\text{अ}^{\text{क्ष}}=\text{न}$, $\text{अ}^{\text{य}}=\text{न}'$; ∴ $\frac{\text{अ}^{\text{क्ष}}}{\text{अ}^{\text{य}}} = \frac{\text{न}}{\text{न}'}$ म्हणजे $\text{अ}^{\text{क्ष-य}} = \frac{\text{न}}{\text{न}'}$.

३. $\text{न}^{\text{म}}$ ह्याचें लागरथम = म × लाग० न.

कारण, ∵ $\text{न}=\text{अ}^{\text{क्ष}}$, ∴ $\text{न}^{\text{म}} = \text{अ}^{\text{मक्ष}}$, ∴ लाग० $\text{न}^{\text{म}}$ = मक्ष = म × ला० न.

४. $\sqrt[\text{म}]{\text{न}}$ ह्याचें लागरथम $\frac{\text{लाग० न}}{\text{म}}$.

कारण, ∵ $\text{न}=\text{अ}^{\text{क्ष}}$, ∴ $\text{न}^{\frac{1}{\text{म}}}=\text{अ}^{\frac{\text{क्ष}}{\text{म}}}$, ∴ लाग· $\text{न}^{\frac{1}{\text{म}}} = \frac{\text{क्ष}}{\text{म}} = \frac{\text{लाग० न}}{\text{म}}$.

ह्यावरून संख्यांचा गुणाकार आणि भागाकार, त्या संख्यांच्या लागरथमांच्या बेरजेनें आणि वजाबाकीनें करतां येतो; आणि त्यांचे वर्गघनादि घात किंवा मूळें, त्यांचे लागरथमास इष्ट घातप्रकाशक किंवा इष्ट मूळप्रकाशक आंकड्यानें गुणून किंवा भागून करतां येतात.

उदाहरणें.

१. जर $\text{क्ष} = \text{अब}$, तर $\text{लाग}^\circ\ \text{क्ष} = \text{लाग}^\circ\ \text{अ} + \text{लाग}^\circ\ \text{ब}$.

२. जर $\text{य} = ६\ \text{अक}$, तर $\text{लाग}^\circ\ \text{य} = \text{लाग}^\circ\ ६ = \text{लाग}^\circ\ \text{अ} + \text{लाग}^\circ\ \text{क}$.

३. जर $\text{क्ष} = \frac{\text{म}}{\text{न}}$, तर $\text{लाग}^\circ\ \text{क्ष} = \text{लाग}^\circ\ \text{म} - \text{लाग}^\circ\ \text{न}$.

४. जर $\text{य} = \text{अ}^{३}$, तर $\text{लाग}^\circ\ \text{य} = ३\ \text{लाग}^\circ\ \text{अ}$.

५. जर $\text{ज्ञ} = \sqrt[४]{\text{क}}$, तर $\text{लाग}^\circ\ \text{ज्ञ} = \frac{१}{४}\ \text{लाग}^\circ\ \text{क}$.

६. जर $\text{स} = \text{अ}\cdot\frac{\text{र}^{\text{न}}-१}{\text{र}-१}\cdot$ तर लागरथमांत नची किंमत काढ.

$$\text{स}(\text{र}-१) = \text{अर}^{\text{न}} - \text{अ},\quad \text{अर}^{\text{न}} = \text{स}(\text{र}-१) + \text{अ},\quad \text{र}^{\text{न}} = \frac{\text{स}(\text{र}-१)+\text{अ}}{\text{अ}},$$

$$\therefore \text{न}\cdot \text{लाग}^\circ\ \text{र} = \text{लाग}^\circ \left\{\text{स}(\text{र}-१)+\text{अ}\right\} - \text{लाग}^\circ\ \text{अ},$$

$$\therefore \text{न} = \frac{\text{लाग}^\circ \left\{\text{स}(\text{र}-१)+\text{अ}\right\} - \text{लाग}^\circ\ \text{अ}}{\text{लाग}^\circ\ \text{र}}.$$

७. जर $५^{\text{क्ष}} = ४००$, तर क्षची किंमत काढ.

$$\text{क्ष}\,\text{लाग}^\circ\ ५ = \text{लाग}^\circ\ ४००,$$

$$\therefore \text{क्ष} = \frac{\text{लाग}^\circ ४००}{\text{लाग}^\circ ५} = \frac{२\cdot६०२०६०}{\cdot६९८९७०} = \text{सुमारें}\ ३\cdot७२.$$

ब्रिगसाहेबानें जें लागरथमांचें कोष्टक केलें आहे त्यांतून

वरच्या उदाहरणांत ४०० आणि ५ ह्यांचीं लागरथमें घेतलीं आहेत.

लागरथमाचे संख्यांत दशांश चिन्हामागें जो आंकडा असतो त्यास **पूर्णांक** (व्यावर्तक) ह्मणतात, आणि तो, ज्या संख्येचें लागरथम काढावयाचें असतें त्या संख्येंत जितके पूर्णांक आंकडे असतात त्या आंकड्यांच्या संख्येंत एक उणा करून बाकी जी संख्या राहते, तीच्या बरोबर असतो. जसें, ४०० ह्यांत तीन पूर्णांक आंकडे आहेत, ह्मणून त्याच्या लागरथमांत २ पूर्णांक आहेत. ह्मणून लागरथमाच्या कोष्टकांत पूर्णांक लिहिलेले नसतात.

१७५२ ह्यांचें लागरथम = ३·२४३५३४.
१७५·२ . . . . = २·२४३५३४.
१७·५२ . . . . = १·२४३५३४.
१·७५२ . . . . = – ०·२४३५३४.
·१७५२ . . . . = – १·२४३५३४.
·०१७५२ . . . . . . = – २२४३५३४.
इ० इ०

प्रकरण १२.

द्विपद सिद्धांत.

(२८). द्विपद सिद्धांताचे योगानें द्विपदाचा कोणताही घात वारंवार गुणाकार केल्याशिवाय आपणास करतां येतो.

अ + क्ष ह्या द्विपदाचा न घात करावयाचा आहे.

$$अ + क्ष = अ\left(१+\frac{क्ष}{अ}\right), \therefore \left(अ+क्ष\right)^{न} = अ^{न}\left(१+\frac{क्ष}{अ}\right)^{न};$$

अशी कल्पना कर कीं $\frac{श}{अ} = य$, आणि $(१+य)^{न} = अ_{१} + बय + कय^{२} + डय^{३} + \cdots प_{१}य^{प} +$ इत्यादि ….(१),

ह्यांत $अ_{१}$, ब, क, ड, इ०, वेळाप्रकाशकांचा यच्या किंमतीशीं कांहीं संबंध नाहीं.

ह्या समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंचा वर्ग केल्यानें,

$$\left.\begin{aligned}(१+य)^{२न} = अ_{१}^{२} + २\,अ_{१}बय + २\,अ_{१}कय^{२} + २\,अ_{१}डय^{३} + २\,अ_{१}इय^{४} &+ \text{इत्यादि}\\ + \quad ब^{२}य^{२} \quad + २\,बकय^{३} + २\,बडय^{४} &+ \text{इत्यादि}\\ + \quad क^{२}य^{४} &+ \text{इत्यादि}\end{aligned}\right\}\cdots\cdot(२).$$

आतां $\because (१+य)^{२न} = (१+२य+य^{२})^{न} = \{१+(२य+य^{२})\}^{न}$, $\therefore$ (१) ह्यांतील कल्पने प्रमाणें,

$$(१+य)^{२न} = अ_{१} + ब(२य+य^{२}) + क(२य+य^{२})^{२} + ड(२य+य^{२})^{३} + \text{इत्यादि},$$

$$\left.\begin{aligned}= अ_{१} + २\,बय + बय^{२} + ४कय^{३} + कय^{४} &+ \text{इत्यादि.}\\ + ४\,कय^{२} + ८\,डय^{३} + १६\,इय^{४} &+ \text{इत्यादि}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(३)$$

आणि $\because$ (२) आणि (३) ह्या श्रेढींतील प्रत्येक $= (१+य)^{२न}$,

$$\therefore अ_{१}^{२} + २\,अ_{१}बय + (२\,अ_{१}क + ब^{२})य^{२} + (२अ_{१}ड + २बक)य^{३} + \cdots\cdot इ० =$$

अ$_1$ + २ बय + (ब + ४ क) य^{२} + (४ क + ८ ड) य + ... इ०

∴ (२६ कल०म०) अ$_1^{२}$ = अ$_1$, ∴ अ$_1$ = १; २ अ$_1$ ब = २ ब, ∴ ब = ब;

$$२ \text{ अ}_1\text{क} + \text{ब}^{२} = \text{ब} + ४ \text{ क}, \;\therefore\; \text{क} = \frac{\text{ब}^{२} - \text{ब}}{२} = \frac{\text{ब} (\text{ब} - १)}{१ \cdot २};$$

$$२ \text{ अ}_1\text{ड} + २ \text{ बक} = ४ \text{ क} + ८ \text{ ड}, \;\therefore\; \text{ड} = \frac{२\text{क} (\text{ब} - २)}{६} = \frac{\text{ब} (\text{ब} - १)(\text{ब} - २)}{१ \cdot २ \cdot ३}; \text{ इ०.}$$

म्हणून,
$$(१ + \text{य})^{\text{न}} = १ + \text{बय} + \frac{\text{ब} (\text{ब} - १)}{१ \cdot २} \text{य}^{२} + \frac{\text{ब} (\text{ब} - १) (\text{ब} - २)}{१ \cdot २ \cdot ३} \text{य}^{३} + \text{इ०} \cdots\cdots (४).$$

ब य च्यापुढें जितकीं पदें आहेत, त्या सर्वांचे जागीं मय^{२}, मांडल्यानें,

(१+य)^{न}=१+ ब य + मय^{२}, ∴ (२७ कल०म०), न लाग० (१+य) = लाग० (१+बय+मय^{२}),
आणि जर असें कल्पिलें कीं, लाग० (१+य) = ॐ + घय + मय^{२} + इ०, ज्यांत ॐ, घ, म, इ०, वेळा मकाशकांचा य चे किंमतीशीं कांहीं संबंध नाहीं; तर

लाग० { १ + (ब य + मय^{२}) } = ॐ + घ (बय + मय^{२}) + म (बय + मय^{२})^{२} + इत्यादि,

∴ न ॐ + नघय + नमय^{२} + इत्या० = ॐ + बघय + घमय + इत्यादि,

∴ (२६कल० म०) न$\overline{\text{ऊ}}$ = $\overline{\text{ऊ}}$, ∴ $\overline{\text{ऊ}}$ = ०; नघ = घब, ∴ ब = न; ह्मणून, (४) ह्यांत बचे जागीं न मांडल्यानें,

$$(\text{१}+\text{य})^{\text{न}} = \text{१}+\text{नय}+\frac{\text{न}(\text{न}-\text{१})}{\text{१}\cdot\text{२}}\text{य}^{\text{२}}+\frac{\text{न}(\text{न}-\text{१})(\text{न}-\text{२})}{\text{१}\cdot\text{२}\cdot\text{३}}\text{य}^{\text{३}}+\text{इत्यादि},$$

ह्मणजे $\left(\text{१}+\frac{\text{क्ष}}{\text{अ}}\right)^{\text{न}} = \text{१}+\text{न}\frac{\text{क्ष}}{\text{अ}}+\frac{\text{न}(\text{न}-\text{१})}{\text{१}\cdot\text{२}}\frac{\text{क्ष}^{\text{२}}}{\text{अ}^{\text{२}}}+\frac{\text{न}(\text{न}-\text{१})\text{न}-\text{२})}{\text{१}\cdot\text{२}\cdot\text{३}}\frac{\text{क्ष}^{\text{३}}}{\text{अ}^{\text{३}}}+\text{इत्यादि},$

$$\therefore (\text{अ}+\text{क्ष})^{\text{न}} = \text{अ}^{\text{न}}\left(\text{१}+\frac{\text{क्ष}}{\text{अ}}\right)^{\text{न}} = \text{अ}^{\text{न}}+\text{नअ}^{\text{न}-\text{१}}\text{क्ष}+\frac{\text{न}(\text{न}-\text{१})}{\text{१}\cdot\text{२}}\text{अ}^{\text{न}-\text{२}}\text{क्ष}^{\text{२}}+\frac{\text{न}(\text{न}-\text{१})(\text{न}-\text{२})}{\text{१}\cdot\text{२}\cdot\text{३}}\text{अ}^{\text{न}-\text{३}}\text{क्ष}^{\text{३}}+\text{इ०},$$

ह्यास सर ऐजाक् न्युटनचा द्विपद सिद्धांत ह्मणतात.

कुरलरी १. क्ष जर ऋण असेल तर त्याचे समघातांचीं पदें धन होतील, आणि विषमघातांचीं ऋण होतील; ह्मणून, $(\text{अ}-\text{क्ष})^{\text{न}} = \text{अ}^{\text{न}}-\text{अ}^{\text{न}-\text{१}}\text{क्ष}+\frac{\text{न}-(\text{न}-\text{१})}{\text{१}\cdot\text{२}}\text{अ}^{\text{न}-\text{२}}\text{क्ष}^{\text{२}}-\frac{\text{न}(\text{न}-\text{१})(\text{न}-\text{२})}{\text{१}\cdot\text{२}\cdot\text{३}}\text{अ}^{\text{न}-\text{३}}\text{क्ष}^{\text{३}}+\text{इत्यादि}.$

कुरल० २ जर अ = १, तर $(\text{अ}+\text{क्ष})^{\text{न}} = \text{१}+\text{नक्ष}+\frac{\text{न}(\text{न}-\text{१})}{\text{१}\cdot\text{२}}\text{क्ष}^{\text{२}}+\frac{\text{न}(\text{न}-\text{१})(\text{न}-\text{२})}{\text{१}\cdot\text{२}\cdot\text{३}}\text{क्ष}^{\text{३}}+\text{इत्यादि},$

$\therefore (\text{अ}+\text{ब}+\text{क})^{\text{न}} = \{\text{अ}+(\text{ब}+\text{क})\}^{\text{न}}$, आणि $(\text{अ}+\text{ब}+\text{क}+\text{ड})^{\text{न}} = \{(\text{अ}+\text{ब})+(\text{क}+\text{ड})\}^{\text{न}}$,

∴ ह्या द्विपद सिद्धांत, बहुत पदांचा देखील कोणताही घात करावयास लागू करतां येईल.

वरील सिद्धता व्यापक आहे, म्हणून न ची किंमत पूर्णांक किंवा अपूर्णांक, धन किंवा ऋण, असली तरी ह्या सिद्धांताची योजना करतां येईल.

ह्या सिद्धांताचा सूक्ष्मतेनें विचार करून पाहिलें असतां असें दिसतें, कीं आरंभापासून अनुक्रमें पुढील सर्व पदांत **अ** चा घात एकानें कमी होत जातो, आणि **क्ष** चा घात एकानें अधिक होत जातो.

पहिलें पद द्विपदाच्या पहिल्या पदाचा **न** घात असतो. पहिल्या पदाचा घातप्रकाशक, एकोन घातप्रकाशक असें तें पहिलें पद, आणि द्विपदाचें दुसरें पद, ह्यांचा गुणाकार केल्यानें दुसरें पद काढतां येतें. पुढील कोणत्याही पदाचा वेळाप्रकाशकास त्याच्याच घातप्रकाशकानें गुणून त्या गुणाकारास पद संख्येनें (जीं पदें लिहिलीं असतील त्यांचे संख्येनें,) भागिलें असतां निघतो.

ह्या सिद्धांतानें द्विपद घातविस्तार करतांना असें लक्ष्यांत येईल कीं जेव्हां **न** पूर्णांक आहे, तेव्हां द्विपदाच्या विस्तारांत **न** + १ पदें येतात; आणि आद्यंत पदांपासून जीं पदें सारखे अंतरावर आहेत त्यांचे वेळा प्रकाशक बरोबर असतात. जेव्हां **न** अपूर्णांक आहे, तेव्हां श्रेढीचा शेवट होत नाहीं.

उदाहरणें.

१. (अ + क्ष) ह्याचा षड्घात कर.

$$(अ+क्ष)^{६} = अ^{६} + ६अ^{५}क्ष + \frac{६\cdot५}{२}अ^{४}क्ष^{२} + \frac{६\cdot५\cdot४}{२\cdot३}अ^{३}क्ष^{३} +$$

$$\frac{६\cdot५\cdot४\cdot३}{२\cdot३\cdot४}अ^{२}क्ष^{४} + \frac{६\cdot५\cdot४\cdot३\cdot२}{२\cdot३\cdot४\cdot५}अक्ष^{५} + \frac{६\cdot५\cdot४\cdot३\cdot२\cdot१}{२\cdot३\cdot४\cdot५\cdot६}क्ष^{६}$$

$= अ^{६}+६अ^{५}क्ष+१५अ^{४}क्ष^{२}+२०अ^{३}क्ष^{३}+१५अ^{२}क्ष^{४}+६अक्ष^{५}+क्ष^{६}.$

घातविस्तार करतांना दुसऱ्या पदाच्या पुढल्या पदांचे वेळा प्रकाशक पुढीलप्रमाणें काढतात. $\frac{६\times५}{२}=१५, \frac{१५\times४}{३}=२०,$ आणि मध्यपदाच्या पुढें ते व्यस्तरीतीनें लिहितात.

२. असें सिद्ध कर कीं $(अ-क्ष)^{५}=$

$$अ^{५}-५अ^{४}क्ष+१०अ^{३}क्ष^{२}-१०अ^{२}क्ष^{३}+५अक्ष^{४}-क्ष^{५}$$

३. असें सिद्ध कर कीं $(अ-क्ष)^{७}=अ^{७}-७अ^{६}क्ष+२१अ^{५}क्ष^{२}-३५अ^{४}क्ष^{३}+३५अ^{३}क्ष^{४}-२१अ^{२}क्ष^{५}+७अक्ष^{६}-क्ष^{७}.$

४. असें सिद्ध कर कीं $(२क्ष+१)^{५}=$

$$३२क्ष^{५}+८०क्ष^{४}+८०क्ष^{३}+४०क्ष^{२}+१०क्ष+१.$$

५. असें सिद्ध कर कीं $\frac{१}{(क+क्ष)^{२}}=(क+क्ष)^{-२}=$

$$\frac{१}{क^{२}}\left(१-\frac{२क्ष}{क}+\frac{३क्ष^{२}}{क^{२}}-\frac{४क्ष^{३}}{क^{३}}+\frac{५क्ष^{४}}{क^{४}}-\text{इत्यादि}\right).$$

६. असें सिद्ध कर कीं $\sqrt[३]{१-क्ष^{३}}=(१-क्ष^{३})^{\frac{१}{३}}=$

$$१-\frac{क्ष^{३}}{३}-\frac{क्ष^{६}}{९}-\frac{५क्ष^{९}}{८१}-\text{इत्यादि}.$$

घात प्रकाशक सिद्धांत.

(२९). $\because अ=१+\overline{अ-१}, \therefore अ^{क्ष}=(१+\overline{अ-१})^{क्ष}=$
$\left\{(१+\overline{अ-१})^{न}\right\}^{\frac{क्ष}{न}};$

$\therefore$ (द्विपद सि०२ कुरल० प्र०), $अ^{क्ष}=\Big\{१+न(अ-१)+$

$$\frac{न(न-१)}{२}(अ-१)^{२}+\frac{न(न-१)(न-२)}{२\cdot३}(अ-१)^{३}+इ० \Big\}^{\frac{क्ष}{न}}$$

$$=\Big\{१+\left[(अ-१)-\frac{(अ-१)^{२}}{२}+\frac{(अ-१)^{३}}{३}-इ०\right]न+बन^{२}+कन+इ० \Big\}^{\frac{क्ष}{न}},$$

येथें (अ−१) ह्याचे घातांचीं जीं पदें $\text{न}^{२}$, $\text{न}^{३}$, इत्यादिकांस गुणक येतात त्या पदांचे बेरजेबद्दल ब, क, इत्यादि पदें घेतलीं आहेत.

आतां $(\text{अ}-१)-\frac{(\text{अ}-१)^{२}}{२}+\frac{(\text{अ}-१)^{३}}{३}-\text{इ०} = \text{अ}_{१}$ घे, तर

$$\text{अ}^{\text{क्ष}} = \left\{ १ + \text{अ}_{१}\text{न} + \text{ब}\text{न}^{२} + \text{क}\text{न}^{३} + \text{इ०} \right\}^{\frac{\text{क्ष}}{\text{न}}} =$$

$$१+\frac{\text{क्ष}}{\text{न}}(\text{अ}_{१}\text{न}+\text{ब}\text{न}^{२}+\text{इ०})+\frac{\frac{\text{क्ष}}{\text{न}}\left(\frac{\text{क्ष}}{\text{न}}-१\right)}{२}(\text{अ}_{१}\text{न}+\text{ब}\text{न}^{२}+\text{इ०})^{२}+\text{इ०},$$

$$= १+\text{क्ष}(\text{अ}_{१}+\text{ब}\text{न}+\text{इ०})+\frac{\text{क्ष}(\text{क्ष}-\text{न})}{२}(\text{अ}_{१}+\text{ब}\text{न}+\text{इ०})^{२}+\text{इ०};$$

आतां ∵ न पदास कोणतीही किंमत दिली तरी हें समीकरण खरें आहे, ∴ न = ० घे, तर

$$\text{अ}^{\text{क्ष}} = १ + \text{अ}_{१}\,\text{क्ष} + \frac{\text{अ}_{१}^{२}\text{क्ष}^{२}}{१\cdot२} + \frac{\text{अ}_{१}^{३}\text{क्ष}^{३}}{१\cdot२\cdot३} + \text{इ०},$$ ह्यास घातप्रकाशक सिद्धांत म्हणतात.

अची किंमत इ अशी धरली कीं $\text{अ}_{१} = १$, तर

$$\text{इ}^{\text{क्ष}} = १ + \frac{\text{क्ष}}{१} + \frac{\text{क्ष}^{२}}{१\cdot२} + \frac{\text{क्ष}^{३}}{१\cdot२\cdot३} + \frac{\text{क्ष}^{४}}{१\cdot२\cdot३\cdot४} + \text{इत्यादि.}$$

जर क्ष = १, तर

$$\text{इ}=१ + \frac{१}{१} + \frac{१}{१\cdot२} + \frac{१}{१\cdot२\cdot३} + \frac{१}{१\cdot२\cdot३\cdot४} + \text{इ०} = २\cdot७१८२८\text{इ०};$$

लागरथमांचा प्रथम कल्पक जो नेपीयर साहेब त्यानें जीं लागरथमिक कोष्टकें तयार केलीं त्यांचा २·७१८२८ हा पाया आहे.

$\text{अ}^{\text{क्ष}} = \text{न}$ ह्या समीकरणांत क्षची किंमत काढ.

दोंहीं बाजूंचा ज्ञघात केल्यानें, $अ^{क्षज्ञ} = न^{ज्ञ}$,

आणि दोनही बाजू घात प्रकाशक सिद्धांता प्रमाणें वाढविल्यानें,

$$१ + \frac{ऊ क्ष ज्ञ}{१} + \frac{ऊ^{२} क्ष^{२} ज्ञ^{२}}{१\cdot२} + \cdots = १ + \frac{न_{१} ज्ञ}{१} + \frac{न_{१}^{२} ज्ञ^{२}}{१\cdot२} + \cdots,$$

येथें $ऊ = (अ-१) - \frac{१}{२}(अ-१)^{२} + \frac{१}{३}(अ-१)^{३} - \cdots$

आणि $न_{१} = (न-१) - \frac{१}{२}(न-१)^{२} + \frac{१}{३}(न-१)^{३} - \cdots$,

ह्याच्या समघातांच्या वेळाप्रकाशकांचें समीकरण केल्यानें,

$ऊ क्ष = न_{१}$, म्हणजे $क्ष = \frac{न_{१}}{ऊ} =$

$$\frac{(न-१) - \frac{१}{२}(न-१)^{२} + \frac{१}{३}(न-१)^{३} - \cdots}{(अ-१) - \frac{१}{२}(अ-१)^{२} + \frac{१}{३}(अ-१)^{३} - \cdots}.$$

आतां $अ^{क्ष} = न$, म्हणून (२७ कल० प्र०) अ पायास क्ष हें न संख्येचें लागरथम आहे. ह्याकरितां कोणतेही पायास कोणतेही संख्येचें लागरथम वरील समीकरणानें काढतां येईल. हल्लीं प्रचारांत जीं लागरथमिक कोष्टकें आहेत, तीं ब्रिगसाहेबानें केलीं आहेत. त्यांत त्यानें अची किंमत १० घेतली आहे.

जर वरचे समीकरणांत असें मानलें कीं न - १ = न,

आणि $\frac{१}{(अ-१) - \frac{१}{२}(अ-१)^{२} + \frac{१}{३}(अ-१)^{३} - \cdots} = म$,

तर $क्ष = लाग०_{अ}(न+१) = म \left\{ न - \frac{१}{२}न^{२} + \frac{१}{३}न^{३} - \frac{१}{४}न^{४} + \cdots \right\}$

जेव्हां नची किंमत फारच कमी म्हणजे अपूर्णांक आहे, तेव्हां मात्र वरील श्रेढीनें (न + १) ह्या संख्येचें लागरथम स्वल्पायासानें काढतां येतें; परंतु जेव्हां नची किंमत अपूर्णांक नाहीं, तेव्हां वरील श्रेढीनें (न + १) ह्या संख्येचें लागरथम स्वल्पायासानें काढतां येत नाहीं.

वरील समीकरणांत नचे जागीं − न लिहून दोन ही स-मीकरणें मांड;

$$\text{लाग}_{\text{अ}}(1+\text{न}) = \text{म}\left(+\text{न} - \frac{1}{2}\text{न}^2 + \frac{1}{3}\text{न}^3 - \frac{1}{4}\text{न}^4 + \cdots\right)$$

$$\text{लाग}_{\text{अ}}(1-\text{न}) = \text{म}\left(-\text{न} - \frac{1}{2}\text{न}^2 - \frac{1}{3}\text{न}^3 - \frac{1}{4}\text{न}^4 - \cdots\right)$$

वजाबाकी

$$\text{लाग}_{\text{अ}}(1+\text{न}) - \text{लाग}_{\text{अ}}(1-\text{न}) = \text{लाग}_{\text{अ}}\frac{1+\text{न}}{1-\text{न}} =$$

$$2\,\text{म}\left\{\text{न} + \frac{1}{3}\text{न}^3 + \frac{1}{5}\text{न}^5 + \cdots\right\}$$

आतां $\text{न} = \frac{1}{2\text{प}+1}$ घे, तर $\frac{1+\text{न}}{1-\text{न}} = \frac{\text{प}+1}{\text{प}}$, म्हणून

$$\text{लाग}_{\text{अ}}\frac{\text{प}+1}{\text{प}} = \text{लाग}_{\text{अ}}(\text{प}+1) - \text{लाग}_{\text{अ}}\text{प} =$$

$$2\,\text{म}\left\{\frac{1}{2\text{प}+1} + \frac{1}{3(2\text{प}+1)^3} + \frac{1}{5(2\text{प}+1)^5}\right\},$$

$$\therefore \text{लाग}_{\text{अ}}(\text{प}+1) = \text{लाग}_{\text{अ}}\text{प} + 2\text{म}\left\{\frac{1}{2\text{प}+1} + \frac{1}{3(2\text{प}+1)^3} + \frac{1}{5(2\text{प}+1)^5}\right\}.$$

जेव्हां प संख्येचें लागरथम माहीत आहे तेव्हां (प+१) ह्या संख्येचें लागरथम वरील श्रेढीनें काढतां येतें, आणि जस-जशी पची किंमत मोठी होते, तसतशी (प + १) ह्या संख्ये-चें लागरथम वरील श्रेढीनें लवकर निघतें.

(३०). $\because \text{अ} + \text{ब} = \dfrac{\text{अ}}{1 - \dfrac{\text{ब}}{\text{अ}+\text{ब}}}$

$$\therefore (अ+ब)^{न} = \frac{अ^{न}}{\left(१-\frac{ब}{अ+ब}\right)^{न}} = अ^{न}\left(१-\frac{ब}{अ+ब}\right)^{-न}$$

∴ (२८ कलं० प्र०), $(अ+ब)^{न}$ =

$$अ^{न}\left\{१+न\left(\frac{ब}{अ+ब}\right)+\frac{न(न-१)}{२}\left(\frac{ब}{अ+ब}\right)^{२}+ इ०\right.$$

ह्यास कोलसनसाहेबाचा सिद्धांत ह्मणतात.

प्रकरण १३.

पाक्षिकविपर्यय, सार्वांशिकविपर्यय, आणि संयोग.

(३१). कितीएक पदांतून प्रत्येकवेळीं कांहीं नियमित पदें घेतलीं असतां, त्या पदाच्या ज्या भिन्न भिन्न रचना होतात, त्यांस त्याचे पाक्षिकविपर्यय म्हणतात.

जसें जर, अ, ब, क, ह्या तीन पदांतून दोन दोन पदें प्रत्येक वेळीं घेतलीं तर त्या तीन पदांचे पाक्षिकविपर्यय **अब, बअ, अक, कअ, बक, कब**, होतील.

जर सगळीं पदें प्रत्येकवेळीं घेतलीं, तर जे त्यांचें पाक्षिकविपर्यय होतात त्यांस त्यांचे सार्वांशिक विपर्यय म्हणतात.

जसें अ, ब, क, ह्यांचे सार्वांशिकविपर्यय **अबक, अकब, बअक, बकअ, कअब, कबअ.** हे होतात.

(३२). जर **न** संख्या **क** भिन्न भिन्न पदांतून **र** संख्या **क** पदें प्रत्येकवेळीं घेतलीं तर त्यांचे पाक्षिकविपर्ययांची संख्या = न (न - १) (न - २) .... { न-(र - १) }.

अ, ब, क, ड, इ०, न संख्या **क** पदें घे; तर एकेक पद घेतल्यानें त्यांचे पाक्षिकविपर्ययांची संख्या **न** होईल.

ह्या पदांतील (**न** - १) म्हणजे **ब, क, ड,** इत्यादि पदें घेऊन त्यांतून प्रत्येक पद घेतलें, तर त्यांचे पाक्षिकविपर्ययांची

संख्या (न - १) होईल; आणि त्या प्रत्येकाचे पूर्वी अ लिहिला, तर न पदांतून प्रत्येकवेळीं, ज्यांत अ प्रथमपद आहे, अशीं दोन दोन पदें घेतल्यानें, न पदांचे (न - १) पाक्षिकविपर्यय होतील; ह्याप्रमाणेंच, ज्यांत ब प्रथम आहे, अशीं दोन दोन पदें प्रत्येक वेळीं घेतलीं, तर न पदांचे (न - १) पाक्षिकविपर्यय होतील; आणि ह्याप्रमाणेंच सर्व न पदांविषयीं होईल, म्हणून न पदांतून दोन दोन पदें प्रत्येक वेळीं घेतलीं असतां न पदांचे एकंदर पाक्षिकविपर्यय न (न - १) होतील.

पुनः, वरील पदांतील (न - १) म्हणजे ब, क, ड, इत्यादि पदें घेऊन त्यांतून प्रत्येक वेळीं दोन दोन पदें घेतलीं तर वरचेप्रमाणें (न - १) पदांचे (न - १) (न - २) इतके पाक्षिकविपर्यय होतील; आणि पुढें वरल्याप्रमाणेंच कृति केल्यानें, न पदांतून प्रत्येक वेळीं तीन तीन पदें घेतलीं असतां न पदांचे पाक्षिकविपर्यय न (न - १) (न - २) होतील.

ह्याचप्रमाणें न पदांतून चार चार पदें प्रत्येक वेळीं घेतलीं तर न पदांचे पाक्षिकविपर्यय न (न-१) (न-२) (न-३) होतील.

ह्मणून, जर न पदांतून १, २, ३, इत्यादि र पदें प्रत्येकवेळीं अनुक्रमें घेतलीं असतां न पदांचे जे पाक्षिकविपर्यय येतील ते दाखवायास $व_{१}$, $व_{२}$, $व_{३}$, इत्यादि $व_{र}$, हीं अक्षरें घेतलीं, तर

$$व_{१} = न, व_{२} = न (न-१), व_{३} = न (न-१) (न-२), इ॰$$

$$व_{र} = न (न-१) (न-२) (न-३), \cdots \{ न - (र-१) \},$$

कुरल॰. ∵ न पदांतून प्रत्येकवेळीं सगळीं पदें एकदम घेतलीं असतां जे त्यांचे पाक्षिकविपर्यय होतात, तेच त्यांचे सार्वांशिकविपर्यय होतात; ∴ रचे जागीं न लिहिल्यानें (आणि सार्वांशिकविपर्यय = प घेतल्यानें),

प = न(न-१) (न-२)····{न-(न-२)} {न-(न-१)},

= न (न-१) (न-२)····२·१ = १·२·३·४···· न.

(३२) आपण वर असें मानलें आहे कीं न संख्या क पदांतील प्रत्येक पद भिन्न भिन्न आहे; परंतु जेव्हां त्यांतील कांहीं पदें एकच आहेत, तेव्हां वर आणलेले सार्वांशिकविपर्यय बरावर नाहींत, ह्याकरितां त्यांत कांहीं फेरफार केला पाहिजे.

अ आणि ब हीं पदें जेव्हां भिन्न आहेत, तेव्हां त्यांचे सार्वांशिकविपर्यय अब, बअ, आहेत; परंतु जेव्हां हीं पदें एकच आहेत, तेव्हां त्यांचा सार्वांशिकविपर्यय अअ आहे. ह्मणून न संख्या क पदांतील प्रत्येक पद भिन्न भिन्न आहे असें मानून आणलेले जे सार्वांशिकविपर्यय त्यांस, जेव्हां त्यांतील दोन पदें अ, ब, सारखींच होतात, ह्मणजे अ = ब, तेव्हां दोहोंनीं भागिलें पाहिजे; कांकीं पदरचनेंतील प्रत्येक पदांत अ, ब, हीं दोन्ही पदें जेव्हां सारखीं होतात, तेव्हां पदरचनेंतील प्रत्येक पद दोनदां आलें असें होतें.

आणि पुनः, जेव्हां न संख्या क पदांतील अ, ब, क, हीं पदे भिन्न भिन्न आहेत, तेव्हां पदरचनेंत हीं पदें क्रमभेदानें साहा वेळ, म्हणजे २ × ३ वेळ, येतात; म्हणून जेव्हां अ, ब, क, हीं पदें सारखींच होतात, म्हणजे अ = ब = क, तेव्हां प्रत्येक पद भिन्न आहे असें मानून आणलेल्या न संख्या क पदांचे सार्वांशिकविपर्ययांस २ × ३ ह्यांनीं भागिलें पाहिजे; म्हणजे जेव्हां अ = ब = क तेव्हां जे न संख्या क पदांचे सार्वांशिक विपर्यय ते=प, तर $\text{प}=\dfrac{\text{न(न-१)(न-२)··३·२·१}}{\text{२ ३}}$

= न·(न-१)(न-२)···४.

आणखी असें मान कीं, न संख्या क पदांतील र संख्या क पदें सारखीं आहेत. आतां जर प्रत्येक पद भिन्न भिन्न असतें तर न संख्या क पदांचें सार्वांशिक विपर्यय न, (न-१) (न-२)····३, २, १ झाले असते, आणि पदरचनें-

तरी र संख्या क पदें क्रमभेदानें, त्यांचे जे सार्वांशिक विपर्यय १·२·३····· र, इतके वेळां आलीं असती; म्हणून जेव्हां हीं र संख्या क पदें सारखींच होतात, तेव्हां प्रत्येक पद भिन्न आहे असें मानून आणलेले जे न संख्या क पदांचे सार्वांशिक विपर्यय, त्यांस १·२·३···· र ह्यांनीं भागिलें पाहिजे; म्हणजे, जेव्हां र संख्या क पदें सारखींच आहेत, तेव्हां जे न संख्या क पदांचे सार्वांशिक विपर्यय ते = प, तर

$$प=\frac{१·२·३·४······न}{१·२·३·४····र}.$$

कुर०. जेव्हां न संख्या क पदांत र संख्या क पदें सारखीं असून दुसरीं क्र संख्या क ही पदें सारखीं आहेत, तेव्हां जे न संख्या क पदांचे सार्वांशिकविपर्यय येतील ते = प, तर वरचे प्रमाणेंच

$$प=\frac{१·२·३·४····न}{१·२····र·१·२···क्र}.$$

(३४). जेव्हां न संख्या क पदांतील कोणतेही एक पद, कितीएक पदें, किंवा सर्व पदें पुनःपुनः घेतां येतात, तेव्हां जे न संख्या क पदांचे पाक्षिकविपर्यय त्यांस — आवृत्त पाक्षिक विपर्यय म्हणतात. जसें अ, ब, क, ह्या तीन पदांतील प्रत्येकाचे पूर्वीं एक अ पद लिहिलें, तर ज्यांत अ पद पूर्वीं आहे असे अअ, अब, अक, तीन पाक्षिकविपर्यय होतील; आणि ह्याप्रमाणेंच ज्यांत ब पूर्वीं आहे असे, बअ, बब, बक, तीन पाक्षिकविपर्यय होतील, आणि क ज्यांत पूर्वीं आहे असे, कअ, कब, कक, तीन पाक्षिकविपर्यय होतील; म्हणून दोन दोन पदें प्रत्येक वेळीं घेतल्यानें, अ, ब, क, ह्या तीन पदांचे एकंदर पाक्षिकविपर्यय ३ × ३, म्हणजे $३^{२}$ = ९, होतील.

ह्याप्रमाणेंच जर न संख्या क पदांतील प्रत्येक वेळीं दोन दोन पदें घेतलीं, तर ज्यांत प्रथमतः येईल असें न पाक्षिक विपर्यय होतील, ब ज्यांत प्रथमतः येईल, असे नच पाक्षिक

विपर्यय होतील, आणि असेंच **न** संख्या **क** पदांतील प्रत्येक पदांविषयीं होईल, म्हणून **न** पदांचे एकंदर आवृत्त पाक्षिक विपर्यय, $न \times न = न^{2}$ होतील.

प्रत्येक वेळीं दोन दोन पदें घेतलीं तर **न** पदांचे आवृत्त पाक्षिक विपर्यय $न^{2}$ होतात, आतां जर प्रत्येक पाक्षिक विपर्ययाचे पूर्वी **न** पदांतील प्रत्येक पद लिहिलें तर, वरचेप्रमाणें प्रत्येक वेळीं तीन तीन पदें घेतलीं असतां **न** संख्या **क** पदांचे एकंदर पाक्षिक विपर्यय $न \times न^{2} = न^{3}$ होतील.

ह्याप्रमाणेंच जर प्रत्येक वेळीं **न** पदें घेतलीं; तर न पदांचे आवृत्त पाक्षिक विपर्यय $न^{न}$ होतील.

आतां जर एक एकदां, दोन एकदां, तीन एकदां, इत्यादि, **न** एकदां घेतल्यानें **न** संख्या **क** पदांचे एकंदर आवृत्त पाक्षिक विपर्यय किती होतील हें काढणें आहे तर, $न + न^{2} +$

$$न^{3} + \cdot \cdot \cdot \cdot न^{न} = न \left\{ \frac{न^{न} - १}{न - १} \right\}$$ हें पद घ्यावें म्हणजे झालें.

(३५) कांहीं वस्तु घेऊन क्रमाकडे लक्ष्य न ठेवितां जे भिन्न भिन्न समुदाय होतात त्यांस त्या पदांचे संयोग म्हणतात. जसें, **अ**, **ब**, **क**, ह्या पदांतून प्रत्येक वेळीं दोन दोन पदें घेतल्यानें त्यांचे संयोग **अब**, **अक**, **बक**, होतात.

आतां **अ**, **ब**, ह्या दोन पदांचे सार्वांशिक विपर्यय **अब**, **बअ**, असे दोन होतात, परंतु ह्यांचा संयोग **अब** एकच होतो; आणि असेंच **अ**, **ब**, **क**, ह्यांचे सार्वांशिक विपर्यय ६ होतात, परंतु ह्यांचा संयोग एकच होतो. जर प्रत्येक वेळीं दोन दोन पदें घेतलीं, तर **न** पदांचे पाक्षिक विपर्यय $न (न - १)$ होतात; परंतु दोन पदांचा संयोग एकच होतो, आणि त्यांचे सार्वांशिक विपर्यय दोन होतात, म्हणून दोन दोन पदें प्रत्येक वेळीं घेतलीं असतां, **न** पदांचे संयोग $= क_{२} = \frac{न (न - १)}{२}$.

पुनः, जर प्रत्येकवेळीं तीन तीन पदें घेतलीं तर न पदांचे पाक्षिकविपर्यय न (न−१) (न−२) होतात, परंतु अ, ब, क, ह्यांचा संयोग एकच होतो, आणि सावांशिकविपर्यय २×३ होतात, ह्मणून प्रत्येक वेळीं तीन तीन घेतलीं असतां,

$$\text{न पदांचे संयोग} = \text{क}_३ = \frac{\text{न}(\text{न}-१)(\text{न}-२)}{२}.$$

वरचे प्रमाणेंच विचार करून पाहिलें असतां असें दिसतें कीं, प्रत्येक वेळीं र पदें घेतलीं, आणि न संख्या क पदांचे संयोग = $\text{क}_\text{र}$ तर

$$\text{क}_\text{र} = \frac{\text{न}(\text{न}-१)(\text{न}-२)\cdots\{\text{न}-(\text{र}-१)\}}{१\cdot२\cdot३\cdots\text{र}}.$$

कुर०. र पदांचे जागीं जर अनुक्रमें १, २, ३, ४, इत्यादि पदें घेतलीं, तर

$$\text{क}_१ = \frac{\text{न}}{१}, \text{क}_२ = \frac{\text{न}(\text{न}-१)}{१\cdot२}, \text{क}_३ = \frac{\text{न}(\text{न}-१ (\text{न}-२)}{१\cdot२\cdot३} + \text{इ०},$$

$$\therefore \text{क}_१+\text{क}_२+\text{क}_३+\text{इ०} = \text{न} + \frac{\text{न}(\text{न}-१)}{१\cdot२} + \frac{\text{न}(\text{न}-१)(\text{न}-२)}{१\cdot२\cdot३}, \text{इ०},$$

परतु (२८ कल० प्र०), $(१+\text{क्ष})^\text{न}$ =

$$१+\text{नक्ष} = \frac{\text{न}(\text{न}-१)}{१\cdot२}\text{क्ष}^३ + \frac{\text{न}(\text{न}-१)(\text{न}-२)}{१\cdot२\cdot३}\text{क्ष}^३ + \text{इ०},$$

$$\therefore (१+१)^\text{न} = २^\text{न} = १+\text{न}+\frac{\text{न}(\text{न}-१)}{१\cdot२} + \frac{\text{न}(\text{न}-१)(\text{न}-२)}{१\cdot२\cdot३.} + \text{इ०},$$

$$\therefore २^\text{न}-१ = \text{न}+\frac{\text{न}(\text{न}-१)}{१\cdot२} + \frac{\text{न}(\text{न}-१)(\text{न}-२)}{१\cdot२\cdot३} + \text{इ०},$$

$\therefore$ क + $\text{क}_२$ + $\text{क}_३$ + इ० = $२^\text{न} - १$ = न पदांतून एक, दोन, तीन, इत्यादि न अनुक्रमें प्रत्येकवेळीं घेतल्यानें जे त्यांचे संयोग होतात त्या सर्वांची बेरीज.

(३६). ज्यांत अनुक्रमें प, क, र, इ० संख्याक पदें आ-

हेत, अशा न रांगी आहेत, प्रत्येक संयोगास प्रत्येक रांगींतून एक एक पद घेतलें, तर एकंदर संयोग = प, क्क, र, इ० ह्या सर्व पद संख्यांचा गुणाकार.

∵ असें समज कीं ज्यांत अनुक्रमें प संख्या क आणि क्क संख्या क पदें आहेत अशा दोन रांगी आहेत तर हें स्पष्ट आहे कीं जर पहिले रांगेंतील कोणतें ही एक पद घेऊन तें आणि दुसरींतील प्रत्येक पद ह्यांचा संयोग केला, तर एकंदर संयोग क्क होतील; ह्मणून पहिलींतील प्रत्येक पद आणि दुसरींतील प्रत्येक पद ह्यांचा संयोग केला, तर एकंदर संयोग पक्क होतील. पुनः, जर र संख्या क पदांची तिसरी एक रांग असेल, तर हींतील प्रत्येक पद आणि दुसऱ्या दोन रांगांतील प्रत्येक संयोग ह्यांचा संयोग केल्यानें पक्क संयोग होतील; ह्मणून प्रत्येकींतून एक एक पद घेऊन त्यांचा संयोग केला, तर एकंदर संयोग पक्कर होतील; आणि ह्याप्रमाणेंच जर स संख्या क पदांची चौथी एक रांग असेल, तर प्रत्येकींतून न एक एक पद घेऊन त्यांचा संयोग केल्यानें एकंदर संयोग पक्करस होतील; आणि ह्याप्रमाणेंच पुढील सर्व रांगीं विषयीं होईल.

कुर०. जर प = क्क = र = इ०, तर प्रत्येकींतून एक एक पद घेऊन त्यांचा संयोग केल्यानें एकंदर संयोग = $\text{प}^{\text{न}}$.

(३७). न पदांतून प्रत्येक वेळीं र पदें घेतल्यानें जे एकंदर संयोग होतात ते, न च पदांतून प्रत्येक वेळीं (न − र) पदें घेतल्यानें जे एकंदर संयोग होतात, त्यांजबरोबर असतात.

असें मानकीं पहिले एकंदर संयोग = $^{\text{न}}\text{क}_{\text{र}}$, आणि दुसरे एकंदर संयोग = $^{\text{न}}\text{क}_{\text{न}-\text{र}}$,

$$\text{तर (३५ कल० प्र०), } {}^{\text{न}}\text{क}_{\text{र}} = \frac{\text{न}(\text{न}-१)(\text{न}-२)\cdots(\text{न}-\text{र}+१)}{१\cdot२\cdot३\cdots\cdots\text{र}};$$

$$\text{आणि } {}^{\text{न}}\text{क}_{\text{न}-\text{र}} = \frac{\text{न}(\text{न}-१)(\text{न}-२)\cdots\cdots\{\text{न}-(\text{न}-\text{र})+१\}}{१\cdot२\cdot३\cdots\cdots(\text{न}-\text{र})};$$

$$= \frac{न(न-१)(न-२)\cdots(र+१)}{१\cdot२\cdot३\cdots\cdots(न-र)},$$

$$= \frac{न(न-१)(न-२)\cdots(न-र+१)\cdot(न-र)\cdots(र+१)}{१\cdot२\cdot३\cdots र\cdot(र+१)\cdots\cdots(न-र)}, \because जर\ र < न-र.$$

$$= \frac{न(न-१)(न-२)\cdots(र+१)\cdot र\cdots(न-र+१)}{१\cdot२\cdot३\cdots(न-र)\cdot(न-र+१)\cdots र}, \because जर\ र > न-र.$$

$\therefore$ कोणत्याही कल्पनेनें, $= \frac{न\cdot(न-१)(न-२)\cdots(न-र+१)}{१\cdot२\cdot३\cdots\cdots र} = {}^{न}क_{र}.$

(३८). म पदांची एक आणि न पदांची एक अशा दोन रांगी आहेत, आणि प्रत्येक संयोगास पहिलींतून र पदें आणि दुसरींतून स पदें घेतलीं, तर एकंदर किती संयोग होतील हें काढावयाचें.

(३५क० म०), $^{म}क_{र} \times {}^{न}क_{स} = \frac{म(म-१)\cdots(म-र+१)}{१\cdot२\cdots र}$

$$\times \frac{न(न-१)\cdots(न-स+१)}{१\cdot२\cdots स}$$

(३९). न पदांचे संयोग बहुतम होण्यास न पदांतून प्रत्येक वेळीं र ही संख्या किती घ्यावी हें काढावयाचें.

आतां $\because {}^{न}क_{र} = {}^{न}क_{र-१}\left(\frac{न-र+१}{र}\right)$, $\therefore$ जोंपर्यंत $(न-र+१) > र$, तोंपर्यंत $^{न}क_{र}$ हें पद वाढत जाईल; ह्मणून जेव्हां $न-र+१ = र$, किंवा $र+१$, तेव्हां मात्र $^{न}क_{र}$ ह्याची किंमत बहुतम होईल; आतां रची किंमत तर पूर्णांक असली पाहिजे आणि जर न ही विषमसंख्या आहे, तर $न-र+१ = र$, ह्मणजे $र = \frac{१}{२}(न+१)$ हें घेतलें पाहिजे, आणि तेव्हां $^{न}क_{र} = {}^{न}क_{र-१}$. ह्यावरून असें दिसतें कीं जेव्हां $र = \frac{१}{२}(न+१)$ इतकीं पदें न पदांतून प्रत्येक वेळीं घ्यावीं तेव्हां न वस्तूंचे संयोग बहुतम होतील; आणि

जेव्हां प्रत्येकवेळीं र−१, ह्मणजे $\frac{१}{२}$ (न−१), इतकीं पदें घ्यावीं तेव्हां ही न वस्तूंचे संयोग बहुतम होतील.

परंतु जेव्हां न ही समसंख्या आहे, तेव्हां न−र+१=र+१, म्हणजे र=$\frac{१}{२}$ न, असें घेतल्यानें र ची किंमत पूर्णांक निघेल; ह्मणजे जेव्हां न ही समसंख्या आहे तेव्हां प्रत्येक वेळीं $\frac{न}{२}$ इतकीं पदें घेतलीं असतां न वस्तूंचे संयोग बहुतम होतील.

उदाहरणें.

१. १० घंटांतून प्रत्येकवेळीं जर ७ घंटा घेतल्या, तर त्यांचे निरनिराळ्या प्रकारचे किती नाद निघतील ?

(पाक्षिक विपर्यय, ३२ कलम प्रमाणें),

$व_र$=न (न−१) (न−२)....{ न−(र−१) };

आणि ∵ १० घंटा आहेत, ∴ न=१०,

आणि ∵ त्यांतून प्रत्येक वेळीं ७ घेतल्या आहेत,

∴ र=७, आणि र−१=६, ∴ न−(र−१) = १० − ६=४,

∴ $व_७$=१०·९·८·७·६·५·४·=६०४८००, इतके प्रकार.

२. एका वर्गांत ६ मुलें आहेत, तीं क्रम भेदानें कितीवेळां आपआपल्या जागा पालटतील ?

(सार्वांशिक विपर्यय, ३२ कल० कुर० प्र०), प=१·२·३....न,

∴ प=१·२·३·४·५·६·=७२०वेळां.

३. किती निरनिराळ्या प्रकारांनीं इन युनक ऐएट ऐ ओन हीं अक्षरें लिहितां येतील ?

(सा० वि० ३३ कल० प्र०), प = $\frac{१·२·३·४.....न}{१·२..र·१·२..क}$;

आणि ∵ ११ अक्षरें आहेत, त्यांत ३ वेळ न आणि २ वेळ ऐ आहे.

∴ न = ११, र = ३, क = २,

$$\therefore प = \frac{१\cdot२\cdot३\cdot४\cdot५\cdot६\cdot७\cdot८\cdot९\cdot१०\cdot११}{१\cdot२\cdot३\cdot१\cdot२} = ३३२६४००$$ इतके प्रकार.

४. एका दशकोनाकृतींत ह्या कोनाग्रापासून त्या कोनापर्यंत रेघा काढल्यानें किती भिन्न भिन्न त्रिकोण होतील?

दाहा कोनांपैकीं सात कोन प्रत्येक वेळीं सांधावयास जितक्या रेघा काढाव्या लागतील तितके त्रिकोण होतील; म्हणजे, दाहा कोनांतून सातकोन प्रत्येक वेळीं घेतल्यानें जितके संयोग होतील तितकेच त्रिकोण होतील.

$$\therefore (\text{संयोग}, ३५ \text{क० म०}), क = \frac{न(न-१)(न-२)\cdots\{न-(र-१)\}}{१\cdot२\cdot३\cdots र},$$

$$= \frac{१०\cdot९\cdot८\cdot७\cdot६\cdot५\cdot४}{१\cdot२\cdot३\cdot४\cdot५\cdot६\cdot७} = १२०.$$

५. २ न वस्तूंतून प्रत्येक वेळीं अनुक्रमें १, २, ३, इ० २ न वस्तु घेतल्यानें जे एकंदर संयोग होतात तेः न वस्तूंतून प्रत्येक वेळीं अनुक्रमें १, २, ३, इ०, न वस्तू घेतल्यानें जे एकंदर संयोग होतात ते : : १२९ : १; तर नची किंमत काढ.

(संयोग, ३५ क० कुर० म०), $२^{न}-१$; येथें न बद्दल २ न लिही, तर,

$२^{२न}-१$ = २ न वस्तूंचे एकंदर संयोग,

$२^{न}-१ = न$ ....

$$\therefore \frac{२^{२न}-१}{२^{न}-१} = \frac{१२९}{१}, \quad \frac{(२^{न}+१)(२^{न}-१)}{२^{न}-१} = \frac{१२९}{१},$$

$२^{न}+१ = १२९$, $२^{न} = १२८$, $२^{न} = २^{७}$, $\therefore$ न = ७. उत्तर.

६. एक १९ व्यंजनांची आणि दुसरी ५ स्वरांची अशा दोन रांगी आहेत, तर ३ व्यंजनें आणि २ स्वर असे पांचवर्ण प्रत्येक वेळीं घेतल्यास किती निरनिराळे वर्ण समुदाय होतील?

(संयोग, ३५,३८ कल० म०), $^{म}क_{र} \times {}^{न}क_{स} =$

$$\frac{म(म-१)\cdots(म-र+१)}{१\cdot२\cdots र} \times \frac{न(न-१)\cdots(न-स+१)}{१\cdot२\cdots स},$$

येथें म = १९ व्यंजनें, न = ५ स्वर, र = ३ .... स = २ .... $\left\{ \begin{array}{l} म - र + १ = १७, \\ न - स + १ = ४, \end{array} \right.$

$$\therefore {}^{म}क_{र} \times {}^{न}क_{स} = \frac{१९\cdot१८\cdot१७}{१\cdot२\cdot३} \times \frac{५ \times ४}{१\cdot२} =$$

९६९×१० = ९६९० समुदाय.

परंतु एकेका समुदायामध्यें पांच पांच अक्षरें आहेत, आणि तीं ५· ४· ३· २· १ इतके वेळां भिन्न भिन्न क्रमानें लिहितां येतील; म्हणून

(सा० वि० ३२ क० कुर० म०), प=न (न-१)···३·२·१·. येथें न = ५, ∴ प = ५· ४· ३· २· १ = १२० = प्रत्येक समुदायाचे सार्वांशिकविपर्यय.

∴ ९६९० × १२० = ११६२८०० वर्णसमुदाय. उत्तर.

७. एका टेलियाफ* नामक यंत्रास म दांडे आहेत, आणि प्रत्येक दांडा न भिन्न भिन्न ठिकाणीं लावतां येतो; तर त्या टेलियाफानें एकंदर किती खुणा करतां येतील ?

(संयोग, ३५ कल० कुर० म०). प्रथमतः १ एकदां, २ एकदां, इ०, घेतल्यानें म दांड्याचे किती संयोग होतात तें काढ.

$$^{म}क_{१} = म,\ ^{म}क_{२} = \frac{म(म-१)}{१\cdot२},\ ^{म}क_{३} = \frac{म(म-१)(म-२)}{१\cdot२\cdot३}, इ०;$$

$$\therefore\ ^{म}क_{१} + {}^{म}क_{२} + {}^{म}क_{३} + इ० =$$

$$म + \frac{म(म-१)}{१\cdot२} + \frac{म(म-१)(म-२)}{१\cdot२\cdot३} + इत्यादि =$$

प्रथमतः १ एकदां, मग २ एकदां, मग ३ एकदां, इ० घेतल्यानें,

* ह्या यंत्रानें बातमी फार जलद पोंचविता येते.

म दांड्यांचे जे एकंदर संयोग होतात ते, परंतु मत्येक भिन्न दांडा भिन्न ठिकाणीं लावतां येतो, म्हणून न ठिकाणांच्या आदलाबदलीसुद्धां एकंदर संयोग $= \text{मन} + \frac{\text{म}(\text{म}-१)}{१\cdot२}\text{न}^{२} + \frac{\text{म}(\text{म}-१)(\text{म}-२)}{१\cdot२\cdot३}\text{न}^{३} + \text{इ}\circ = (१+\text{न})^{\text{म}} - १.$ ∴ (२८ कलम २ कुर० म०).

८. पांच घंटांनीं भिन्न भिन्न मकारचे किती नाद काढतां येतील ? उत्तर. १२०.

९. एक एकाचा, दोन दोंहोंचे, तीन तिहींचे, चार चोंहोंचे हे आंकडे मत्येक संख्येंत आणले असतां त्यांच्या भिन्न भिन्न किती संख्या होतील ?

उत्तर. १२६००.

१०. आठ घंटांतून मत्येक वेळीं चार चार घंटा घेतल्या, तर त्यांनीं निरनिराळ्या मकारचे किती नाद काढतां येतील ?

उत्तर. १६८०.

११. २ न + १ वस्तूंतून मत्येक वेळीं न - १ घेऊन जे पाक्षिकविपर्यय येतात ते : २ न - १ वस्तूंतून मत्येक वेळीं न वस्तू घेऊन जे पाक्षिकविपर्यय येतात ते : : ३ : ५ ; तर न ची किंमत काढ. उत्तर. ४.

१२.* बावन्न गंजिफांतून दरखेपेस हातांत तेरा तेरा धरल्या, तर त्यांत किती वेळां आदलाबदल करतां येईल ?

उत्तर. ६३५०१३५५९६००.

१३. एका टोळींत ५० शिपाई आहेत, आणि त्यांतून पाहाऱ्यावर मत्येक रात्रीं चार चार शिपाई पाठविले, तर पहिल्या चारही शिपायांची पुनः पाळी नयेतां किती रात्रीं वेगवेगळे शिपाई धाडतां येतील ?

उत्तर. २३०३००

१४. १६ वस्तूंतून एका खेपेस १, दुसऱ्या खेपेस २, तिस-

ल्या खेपेस ३, इ० वस्तू घेतल्या असतां त्यांचे एकंदर संयोग किती होतील? उत्तर. ६५५३५.

१५. दर खेपेस दोन दोन वस्तू घेतल्यानें म + न वस्तूंचे ५६ पाक्षिकविपर्यय होतात, आणि तितक्याच घेतल्यानें म-न ह्या वस्तूंचे १२ पाक्षिकविपर्यय होतात; तर म वस्तूंतून दरखेपेस न वस्तू घेतल्या असतां त्यांचे किती संयोग होतील?

उत्तर. १५.

१६. १२ वस्तू आहेत, त्यांतून दरवेळीं ५ वस्तू घेतल्या असतां त्यांचे आवृत्त पाक्षिकविपर्यय किती होतील?

उत्तर. २४८८३२.

१७. न वस्तूंत प एका जातीच्या आहेत, क्र एका जातीच्या आहेत, र एका जातीच्या आहेत, इत्याद्यनेक वस्तू अनेक जातीच्या आहेत; तर असें सिद्ध कर कीं त्यांतून पहिल्या खेपेस १, दुसऱ्या खेपेस २, इत्यादि नव्या खेपेस न घेतल्या असतां, त्यांचे सर्व भिन्न भिन्न संयोगांची संख्या=(प+१) (क्र+१) (र+१), इ०-१.

१८. ४० शिपायांची एक, आणि ४२ शिपायांची एक, ४५ शिपायांची एक, आणि ५० शिपायांची एक, अशा चार टोळ्या आहेत; दरएक टोळींतून एकेक शिपाई घेतला असतां, प्रथमतः जे चार शिपाई घेतले ते पुनः न घेतां, कितीवेळां चार चार निरनिराळे शिपाई घेतां येतील? उत्तर. ३७८००००.

प्रकरण १४.

चक्रवाढव्याज आणि प्राप्ति.

(४०). उसना दिलेला पैसा म्हणजे मुद्दल = प पौंड घे,
रास म्हणजे व्याजमुद्दलांची बेरीज = म······

पहिल्या मुदतीचें १ पौंडाचें व्याज = र,......

त्याच मुदतींची एका पौंडाची रास = (१+र,)=र,

मुदतींची संख्या = न

तर पहिल्या मुदतीचे अंतीं १ पौंडाची रास र पौंड होतील, आणि र पौंड हें दुसऱ्या मुदतीचें मुद्दल होईल.

∴ १ : र : : र : $र^{२}$ = दोनमुदतींत एका पौंडाची रास,

ह्याप्रमाणेंच १ : $र^{२}$: : र : $र^{३}$ = तीन..................

आणि असेंच पुढेंही. ∴ $र^{न}$ = न मुदतींत १ पौंडाची रास; आणि जेव्हां मुद्दल प पौंड आहे, तेव्हां त्याची रास १ पौंड मुद्दलाच्या राशीच्या प पट होईल. ∴ म=$पर^{न}$,

∴ (२७ क०म०), लाग० म=लाग० प + (लाग०र) ×न.

प, म, न, र ह्या चार पदांतून कोणतीं ही तीन पदें दिलीं असतां वरील समीकरणापासून चवथें पद काढतां येईल.

(४१). कर्जीं दिलेल्या पैशाचें व्याज, घरांचें किंवा जमिनीचें भाडें, पेनशन, किंवा चाकरीचापैसा,वगैरे वर्षास घ्यावयाचा जो पैसा त्यास प्राप्ति ह्मणतात. प्राप्ति दाखवायास अ पौंड घे, आणि एक पौंडाची एक वर्षाची रास दाखवायास र घे; तर पहिल्या वर्षाचे अंतीं प्राप्तीची रास अ आहे, आणि अच दुसऱ्या वर्षाचें मुद्दल आहे.

∴ १ : अ : : र : अर=त्याची दुसऱ्या वर्षाचे अंतींची रास,

∴ अ + अर = अ (१+र) = दुसऱ्या वर्षाचे अंतीं एकंदर पैसा येणें तो;

असेंच १ : अ (१+र) : : र : अ (र+$र^{२}$) = त्याची तिसऱ्या वर्षाचे अंतींची रास,

∴ अ + अ (र + $र^{२}$) = अ (१ + र + $र^{२}$) = तिसऱ्या वर्षाचे अंतीं एकंदर पैसा येणें तो;

ह्याचप्रमाणें अ (१ + र + $र^{२}$ + $र^{३}$) = चवथ्या वर्षाचे अंतीं पैसा येणें तो; आणि सामान्यतः

$अ (१ + र + र^{२} \cdots र^{न-१}) = अ \frac{र^{न}-१}{र-१}$ = चक्रवाढ-व्याजानें न वर्षांचे अंतीं मामीचा एकंदर पैसा येणें तो = म घे;

लाग० म=लाग० अ + लाग० ($र^{न}$- १)-लाग०(र-१).

(४२). अ मामीची सांमत किंमत दाखवायास ब घे, तर (४०, ४१ क० म०), $वर^{न}=अ \times \frac{र^{न}-१}{र-१}$, $\therefore व = अ \frac{१-र^{-न}}{र-१}$,

∴ लाग० व=लाग० अ+लाग० (१-$र^{-न}$)-लाग० (र-१).

कुर०. जर मामि सतत चालावयाची आहे, तर नची किंमत अनंत आहे,

$$\therefore र^{-न} = \frac{१}{र^{न}} = ०,$$

आणि $व = \frac{अ}{र-१}$ = दरसाल अ पौंड अशा सतत चालणाऱ्या मामीची सांमत किंमत.

(४३). जर अ मामि म वर्षांनंतर चालू होऊन न वर्षें पर्यंत चालावयाची आहे; तर तिची सांमत किंमत, ती म + न वर्षेंपर्यंत चालली असतां जी तिची सांमत किंमत होईल तींत ती म वर्षेंपर्यंतच चालावयाची असतां जी तिची सांमत किंमत होईल ती वजा देऊन जी बाकी राहील, तिजबरोबर होईल; ह्मणजे.

$$व = अ \frac{१-र^{-(म+न)}}{र-१} - अ \frac{१-र^{-म}}{र-१} = \frac{अर^{-म} - अर^{-म-न}}{र-१},$$

$$= \frac{अर^{-म}(१-र^{-न})}{र-१};$$

लाग० व = लाग० अ-म लाग० र + लाग० (१ -$र^{-न}$) -लाग० (र-१).

कुर०. जर मामि सतत चालावयाची असेल, तर न अनंत होईल,.

$$\therefore र^{-न}=०, \text{आणि } व=\frac{अर^{-म}}{र-१}$$ = कांहीं वर्षांनंतर चालू होऊन पुढें सतत चालणाऱ्या मामीची सांप्रत किंमत.

उदाहरणें.

१. दर वर्षास व्याजाचा हिशेब करण्याचा करार आहे, तर दरसाल दरशेंकडा ४ $\frac{१}{२}$ पौंड व्याजाप्रमाणें १२ वर्षांत चक्रवाढव्याजानें ५००० पौंड रास होण्यास किती पौंड मुद्दल असावें ?

(४० क० म०), लाग० प = − नलाग० र + लाग० म
= − १२ लाग० (१.०४५) + लाग० ५०००.

आतां लाग० (१.०४५) = ०.०१९११६३
१२

०.२२९३९५६ , (१)

लाग० ५००० =३.६९८९७०० , (२)

लाग० प =३.४६९५७४४ ∴ (२)-(१):

∴ प=२९४८.३१८३६=२९४८ पौंड ६ शि० ४ $\frac{१}{२}$ पेन्स.
उत्तर.

टीप. येथें (२) ह्यांतून (१) हें वजा केलें आहे. परंतु बहुत लागरथमिक संख्यांचे बेरजेंतून एक लागरथमिक संख्या किंवा बहुत लागरथमिक संख्यांची बेरीज वजा करणें झाल्यास, लिहिण्यास व कृति करण्यास फार अवघड पडतें; ह्मणून ज्या लागरथमिक संख्या वजा करायाच्या असतील त्यांतील

प्रत्येकीचें कांप्लिमेंट घेऊन तें लिहावें, ह्मणजे सर्व लागरथमिक संख्यांची एकंदर बेरीज करतां येते.

जसें, वरील उदाहरणांत,

कांप्लिमें॰ लाग॰ (१·०४५) = $\bar{१}$·९८०८८३७
१२

= $\bar{१}$·७७०६०४४

लाग॰ ५००० = ३·६९८९७००

लाग॰ प = ३·४६९५७४४·

२. दरवर्षास व्याजाचा हिशेब करण्याचा करार आहे, तर चक्रवाढव्याज दरसाल दरशेंकडा ४½ पौंडांप्रमाणें २० वर्षांत १०० पौंड वार्षिक मामीची रास किती पौंड होईल ?

(४१क॰ म॰), लाग॰म=लाग॰($र^{न}$−१)+लाग॰अ−लाग॰(र−१),
[न खाली: २०]

=लाग॰(१·०४५−१)+लाग॰अ−लाग॰(·०४५),

आतां, लाग॰(१००४५) = ०·०१९११६३
२०

०·३८२३२६०

ह्याची संख्या = २·४११७१५०
− १

१·४११७१५०

ह्याचें लाग॰ = ०·१४९७४७०

लाग॰ (१००) = २

कां॰लाग॰(·०४५) = १·३४६७८७५

लाग॰ म = ३·४९६५३४५,

---

* लागरथमिक संख्या शून्यांत बजाकरून जी बाकी, तिला त्या लागरथमिक संख्येचें कांप्लिमेंट म्हणतात; अथवा ज्या संख्येचें लागरथम बजाकरावयाचें असेल त्या संख्येचा व्युत्क्रम घेऊन त्याचें जें लागरथम त्यास त्या संख्येचें कांप्लिमेंटल लागरथम म्हणतात.

∴ म=२१३७·१४४=२१३७ पौंड २ शि० १०½ पेन्स. उत्तर.

जर सामाही व्याज घेण्याचा करार असेल, तर न = ४०,

$\text{र}_1 = \frac{\cdot ०४५}{२} = \cdot ०२२५$, आणि र = १·०२२५.

जर तिमाही व्याज घेण्याचा करार असेल, तर न = ८०, आणि र = १·०११२५.

३. एका जमिनीचें निर्क्के उत्पन्न १२५ पौंड आहे, तर २१ वर्षांचा कऊल देणें झाल्यास चक्रवाढव्याज दरसाल दरशेंकडा ५ पौंडांप्रमाणें आज किती पौंड द्यावे ?

(४२क०म०), $\text{लाग०व}=\text{लाग०}(१-\text{र}^{-न})+\text{लाग०अ}-\text{लाग०}(\text{र}-१)$,

$= \text{लाग०}(१-१\cdot०५^{-२१})+\text{लाग०}१२५-\text{लाग०}(\cdot०५)$.

आतां $\text{लाग०}\,\text{र}^{-न} = \text{लाग०}\,\frac{१}{\text{र}^{न}} = \text{कां०}\,\text{लाग०}\,\text{र}^{न}$

$= \text{कां०लाग०}(१\cdot०५)^{२१} = \bar{१}\cdot९७८८१०७\times२१$

$= \bar{२१}+२०\cdot५५५०२४७$

$= \bar{१}\cdot५५५०२४७$,

∴ $\text{र}^{-न} = \cdot३५८९४२२$, आणि $१-\text{र}^{-न} = \cdot६४१०५७८$

लाग० (०·६४१०५७८)	= १·८०६८९७३
लाग० (१२५)	= २·१२०३३३८
कां० लाग० (·०५)	= १·३०१०३००
लाग० व	= ३·२३८२६११

∴ व=१७३०·८५६५=१७३० पौं० १७ शि० १½ पेन्स. उत्तर.

४. दरसाल व्याजाचा हिशेब करण्याचा करार आहे, तर चक्रवाढ व्याज दरसाल दरशेंकडा ५ पौंडांप्रमाणें ८०० पौंडांचें ९ वर्षांत व्याज काय होईल ?

उत्तर. ४४१ पौंड १ शि० ३ पेन्स.

५. साहामाही व्याजाचा हिशेब करण्याचा करार आहे.

तर चक्रवाढव्याज दरसाल दरशेंकडा ६ पौंडांप्रमाणें ३५६ पौंड वार्षिक मामीची ९ वर्षांत रास किती होईल ?

उत्तर. ४१६७ पौं० १५ शि० ४$\frac{३}{४}$ पेन्स.

६. सरकारानें एका मनुष्यास ५ वर्षेंपर्यंत ७० पौंड वर्षासनकरून दिलें, आणि त्यास असा हुकूम दिला कीं तिमाही पैसा घेत जावा. परंतु त्या मनुष्यास कर्जानें फार व्यापलें होतें, म्हणून त्यास आजच पैशाची फार गरज लागली, तर चक्रवाढव्याज दरसाल दरशेंकडा ५ पौंडांप्रमाणें त्यास त्या वर्षासनाची आज काय किंमत येईल ?

उत्तर. ३०७ पौं० १९ शि० ८$\frac{१}{२}$ पेन्स.

७. एका मनुष्याचें आजपासून ५ वर्षांनीं १००० पौंड वर्षासन चालू होऊन तें २० वर्षेंपर्यंत चालणार आहे. परंतु त्यास आजच पैशाची फार गरज आहे, तर चक्रवाढव्याज दरसाल दरशेंकडा ५ पौंडांप्रमाणें त्यास त्याच्या वर्षासनाची आज काय किंमत येईल ? उत्तर. ९७६४ पौंड ९ शि० ४$\frac{३}{४}$ पेन्स.

८. एका शेतकऱ्यानें १०० पौंड देऊन एका शेताचा ५५$\frac{३}{४}$ वर्षें कऊल घेतला, तर चक्रवाढव्याज दरसाल दरशेंकडा ५$\frac{१}{२}$ पौंडांप्रमाणें तें शेत दुसऱ्यास भाड्यानें देणें झाल्यास त्यानें दुसऱ्यापासून दरसाल किती भाडें घ्यावें ?

उत्तर. ५ पौं० १६ शि०.

९. एका गृहस्थास १०० पौंड वर्षासन सतत चालावयाचें आहे, आणि दुसऱ्या तितक्याच पौंडांचें वर्षासन ६० वर्षें चालावयाचें आहे, तर त्याच्या आणि ह्याच्या वर्षासनाच्या आजच्या किंमतींत चक्रवाढव्याज दरसाल दरशेंकडा ५ पौंडांप्रमाणें काय अंतर पडेल ?

उ० { चिरकाळ चालणाऱ्या वर्षासनाची किंमत ६० वर्षें चालणाऱ्याच्यापेक्षां १०७पौं० १शि० ४$\frac{३}{४}$पे० ह्यानें अधिक आहे. }

१०. आजपासून ७ वर्षांनीं पुढें ५० पौंडांचें वर्षासन चालू होऊन तें १४ वर्षें चालावयाचें आहे, तर तें आज किती पौंड

देऊन आपणाकडे करून घ्यावें म्हणजे दरशेंकडा ५ पौंड मिळतील?

उत्तर. सुमारें २५१ पौंड १० शि०.

११. एका गृहस्थानें सावकाराच्या दुकानीं चक्रवाढ व्याजानें ३ वर्षेपर्यंत ५१८ पौंड ६ शिलिंग ठेविले, आणि ३ वर्षें झाल्यावर व्याजमुद्दल सुद्धां ६०० पौंड घेऊन गेला; तर व्याजाचा दर काय होता?

उत्तर. दरशेंकडा ५ पौंड.

१२. चक्रवाढव्याज दरसाल दरशेंकडा ४ पौंडांप्रमाणें एकाद्या रकमेची दुप्पट व्हावयास किती वेळ लागेल?

उत्तर. १७.६ वर्षे.

१३. एक गृहस्थ ४० वर्षेपर्यंत दरसाल २० पौंड सावकाराचे दुकानीं ठेवितो, तर चक्रवाढव्याज दरसाल दरशेंकडा ५ पौंडांप्रमाणें ४० वर्षांचे अंतीं त्यास व्याजमुद्दल मिळून एकंदर किती पैका मिळेल?

उत्तर. २५३६ पौंड १६ शि०.

१४. चक्रवाढव्याज दरसाल दरशेंकडा ५ पौंडांप्रमाणें ५ वर्षें चालणाऱ्या ४० पौंड वर्षासनाची आज काय किंमत होईल?

उत्तर. १७३ पौं० ३ शि० ७ पेन्स.

१५. दरसाल ७९ पौंड ४ शिलिंग भाडें येणारें एक घर विकावयाचें आहे, तर चक्रवाढव्याज दरसाल दरशेंकडा ४ $\frac{१}{२}$ पौंडांप्रमाणें त्या घराची आज काय किंमत येईल?

उत्तर. १७६० पौंड.

१६. कोणी एक गृहस्थ प पौंड व्याजीं लावितो, आणि दरसाल त्याचें जितकें व्याज येतें त्याचा $\frac{१}{म}$ भाग आपले भांडवलांत मिळवितो; तर त्यास न वर्षांचे अंतीं व्याजमुद्दल मिळून एकंदर किती पौंड मिळतील?

उत्तर. $प\left(\frac{र}{म}+१+र\right)^{न}$.

१७. एका गृहस्थास आजपासून १० वर्षांनीं २० पौंडांचें वर्षासन होऊन तें ११ वर्षेपर्यंत चालणार आहे, तर चक्रवाढव्याज दरसाल दरशेंकडा ३ $\frac{१}{२}$ पौंडांप्रमाणें त्यास त्याच्या वर्षासनाची आज काय किंमत येईल?

उत्तर. ११८ पौं० ७ शि० ३$\frac{१}{२}$ पेन्स.

१८. एका गृहस्थास **अ** आणि **ब**, हे दोन मुलगे होते. त्यानें आपले मरणसमयीं प्रत्येकास दरसाल १००० पौंड उत्पन्नाचे जमिनीचा अर्ध विभाग दिला. वडील वारल्यावर **अ** **ब** स ह्मणाला कीं तूंच दोन ही विभाग घे आणि मला त्या विभागाबद्दल २० वर्षेपर्यंत वर्षासन करून दे; तर चक्रवाढव्याज दरसाल दरशेंकडा ४$\frac{१}{२}$ पौंडांप्रमाणें **ब**स **अ** नें किती पौंडांचें वर्षासन करून द्यावें?

उत्तर. ८५४ पौं० २ शि० ४ पेन्स.

समाप्त.